

NICHT-AXIALE DEFORMATIONEN
BEI DER SPALTUNG SCHWERER
UND ÜBERSCHWERER KERNE

Hildegard Schultheis

1972

VERGLEICHENDE ANATOMIE DER HAUT DES MENSCHEN UND

VERSCHIEDENER TIERE

zur Erlangung des Doktorgrades der
Philosophie an der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Hildegard Geroldstein
aus Frankfurt a.M.

München 1912

NICHT-AXIALE DEFORMATIONEN BEI DER SPALTUNG SCHWERER UND
ÜBERSCHWERER KERNE

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der
Fakultät für Physik der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Hildegard Schultheis
aus Frankfurt a.M.

München 1972



Berichterstatter: Professor Dr. G. Süßmann

Wiss. Rat u. Professor Dr. H. J. Specht

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Juli 1972

Inhalt

Zusammenfassung

5

I Einleitung

8

II Parametrisierung und differentialgeometrische Eigenschaften nicht-axialer Kerngestalten

13

II.1 Rotationssymmetrische Parametrisierung

13

II.2 Nicht-axiale Ellipsoide

16

II.3 Deformationsenergie und Differentialgeometrie

17

II.4 Gaußsche Koordinaten

19

II.5 Metrischer Fundamentaltensor und Flächeninhalt

21

II.6 Zweiter Fundamentaltensor und Hauptkrümmungen

23

II.7 Mittlerer Krümmungsradius

26

III Bindungs- und Deformationsenergie

28

III.1 Tröpfchenmodell-Terme

28

III.2 Schalenenergie

30

IV Abweichungen von der Rotationssymmetrie in den Spaltbarrieren der Aktiniden

32

IV.1 Flächen der potentiellen Energie

32

IV.2 Grundzustand

33

IV.3 Sekundärminimum

49

IV.4 Erster und zweiter Sattelpunkt

51

IV.5 Deformation minimaler Energie

57

V	<u>Nicht-axiale primäre Fragmente von U^{236}</u>	61
V.1	Masse und Ladung der Fragmente	62
V.2	Gestalt der Fragmente	63
V.3	Schalenkorrektur am Spalt punkt	66
V.4	Anregungsenergie und Deformationsenergie	67
V.5	Kinetische Energie der Fragmente	72
VI	<u>Überschwere Elemente</u>	80
VI.1	Magische Protonenzahl und Schalenkorrektur-Parameter	81
VI.2	Oblaten-Prolaten-Spaltung	83
VI.3	Schalenenergie und γ -Deformation	86
VI.4	Spaltbarrieren der β -stabilen gg-Kerne	89
VI.5	Zerfallswahrscheinlichkeit für spontane Spaltung	98
A	<u>Anhang</u>	102
A.I	<u>Coulomb-Energie eines Ellipsoids</u>	102
A.I.1	Rotationsellipsoid	102
A.I.2	Dreiaxsisches Ellipsoid	103
A.II	<u>Elektrostatische Wechselwirkungsenergie zweier Ellipsoide</u>	104
A.II.1	Getrennte Ladungsverteilung	104
A.II.2	Rotationsellipsoide	105
A.II.3	Dreiaxsisge Ellipsoide	108
	<u>Literatur</u>	115

Zusammenfassung

Die potentielle Energie im Verlauf der Kernspaltung wird für sechzehn gg-Kerne im Bereich der Aktiniden, für zwanzig Fragmentmassenverhältnisse am Spalt punkt des Compoundkerns U^{236} und für acht hypotetische, überschwere, β -stabile gg-Kerne in der Umgebung der magischen Protonenzahl $Z=114$ und der magischen Neutronenzahl $N=126$ berechnet, ohne von der üblichen Annahme rotationssymmetrischer Gestalt Gebrauch zu machen. Dabei werden Schaleneffekte mit einer semi-empirischen Methode untersucht, deren Ergebnisse bei rotationssymmetrischer Kerngestalt denen der Strutinsky-Methode nahekommen. Um die Coulomb-Energie über das Dirichletsche Potential berechenbar zu machen, werden als Parametrisierung der Kerngestalt dreiachsige Ellipsoide (mit den Bohrschen Parametern β und γ) benutzt - außerdem für die Fragmente am Spalt punkt eine Konfiguration, die aus zwei koaxialen dreiachsigen Ellipsoiden zusammengesetzt ist. Für die Coulomb-Wechselwirkungsenergie dieser Parametrisierung wird eine Integrationsmethode angegeben, durch die die numerische Rechnung auf eine dreifache Integration (eine uneigentlich) zurückgeführt werden kann. Auf diese Weise kann zum ersten Mal die Stabilität gegenüber nicht-axialen Deformationen an allen invarianten Punkten der potentiellen Energie im gesamten Verlauf der Kernspaltung geprüft werden.

Die Ergebnisse der Rechnungen zeigen, daß die übliche Annahme rotationssymmetrischer Kerngestalt während der Spaltung nicht erfüllt ist. Die Energieflächen der sechzehn untersuchten Kerne zwischen Th^{228} und Fm^{260} ergeben nur für den Grundzustand und für das Sekundär-Minimum rotationssymmetrische Gestalt. Sowohl der erste, als auch der zweite Sattelpunkt aller untersuchten Aktiniden wird nur durch die übliche Beschränkung auf rotationssymmetrische Gestalt erzeugt. Die Energie an diesen Punkten erweist sich als instabil gegen nicht-axiale Deforma-

tion. Die Verschiebung der scheinbaren, axialen Sattelpunkte zum nicht-axialen Bereich der Potentialfläche wächst mit zunehmender Massenzahl von $\gamma = 5^\circ$ bei leichten Aktiniden bis $\gamma = 21^\circ$ für schwere. Der Energiegewinn gegenüber rotationssymmetrischer Deformation nimmt ebenfalls mit der Kernmasse zu von ungefähr 0.1 MeV für Th^{228} bis zu 0.6 MeV für Fm^{254} . D.h. die Spaltbarrieren werden um etwa 10% relativ zum Grundzustand und um bis zu 28% relativ zum isomeren Zustand überschätzt, wenn man nur rotationssymmetrische Freiheitsgrade zuläßt. Auch die zweiten Sattelpunkte der Deformationsenergie entsprechen nicht-axialer Kerngestalt, doch ist die Energiekorrektur zum rotationssymmetrischen Fall geringer als für den ersten Sattelpunkt. Der Weg zur Spaltung längs des Gradienten der Energiefläche verläuft vom Grundzustand über den ersten Sattelpunkt zum zweiten Minimum und von dort zum zweiten Sattelpunkt vollkommen im nicht-axialen Bereich der Potentialfläche. Er endet, je nach Fragmentmasse, bei axialer oder nicht-axialer Deformation am Zerreißpunkt, da hier Schaleneffekte der Fragmente überwiegen. Für die beiden Minima, den ersten Sattelpunkt und den Weg, der die drei stationären Punkte verbindet, werden in der β - γ -Parametrisierung empirische Relationen als Funktionen der Neutronenzahl N und der Protonenzahl Z angegeben.

Oblatenförmige Deformationen haben sich gegenüber dem prolatenförmigen Grundzustand als nicht stabil erwiesen. Lokale Oblatenminima und Prolatenminima sind durch ein deutliches Tal in der β - γ -Ebene verbunden, das energetisch in allen Fällen die prolatische Deformation ($\beta > 0, \gamma = 0$) begünstigt. Der bei den leichteren Aktiniden zwischen diesen Gestalten auftretende Sattelpunkt liegt unterhalb der Nullpunktsenergie des Oblatenminimums. Die Verbindung Oblate - Prolate wird ausgeprägter mit zunehmender Massenzahl, der Energieunterschied wächst von 1.6 MeV für Th^{228} bis 4.5 MeV für Fm^{260} . Die Steifheiten bezüglich γ -Deformation sind im zweiten Minimum geringer als im Grundzu-

stand - im Gegensatz zu Ergebnissen von Pashkevich und Werten nach dem Tröpfchen-Modell.

Die rotationssymmetrische Fragmentdeformation wird über experimentelle Anregungsenergien aus Neutronen- und Gamma-Emission bestimmt und die Energie der γ -Deformation der Fragmente bei konstanter Kernlänge minimalisiert. Der Einfluß der nicht-axialen Deformation auf die Anregungsenergie der Fragmente wird untersucht. Die Resultate für die kinetische Energie der Fragmente stimmen bei Berücksichtigung der Coulomb-Anregung gut mit Experimenten überein.

Rechnungen für die Deformationsenergie des hypothetischen, doppelt magischen, überschweren Kerns 114^{298} und für die β -stabilen gg-Kerne seiner Umgebung zeigen, daß die von anderen Autoren nach Aufsummieren von Einteilchenenergien vermutete Oblaten-Mehrfach-Spaltung als mögliche Zerfallsart überschwerer Kerne nicht in Betracht kommt. Die Spaltung dieser Kerne beginnt zwar wie die Oblaten-Spaltung, doch entspricht der Sattelpunkt nicht-axialer Deformation. In der Nähe des Sattelpunktes wird die abgeplattete, rotationssymmetrische Kerngestalt zunächst nicht-axial, dann länglich und endet in der normalen Prolaten-Zweifach-Spaltung wie bei Aktiniden. Eine Korrektur zur rotationssymmetrisch berechneten Lebensdauer gegenüber spontaner Spaltung wird nach einer eindimensionalen WKB-Näherung abgeschätzt, ihre Abhängigkeit von Masse und Ladung des Kerns und ihr Einfluß auf die Größe der vermuteten Insel überschwerer Kerne diskutiert.

I Einleitung

Zur Berechnung der potentiellen Energie bei der Kernspaltung wird im allgemeinen angenommen, der Kern habe rotationssymmetrische Gestalt und diese Symmetrie bleibe in jeder Phase der Kernspaltung erhalten. Nicht-axiale Freiheitsgrade werden in fast allen Arbeiten ignoriert, weil für diese die Deformationsenergie sehr viel schwieriger zu berechnen ist als für die entsprechenden Größen im rotationssymmetrischen Fall. Dies schien gerechtfertigt, weil nach dem Tröpfchenmodell der Kernspaltung (Bohr und Wheeler¹⁾ 1939) der Kern gegen nicht-axiale Deformationen auf dem Weg vom Grundzustand zum Zerreißpunkt stabil ist (vgl. z.B. Wilets²⁾).

Experimente und Rechnungen der letzten Jahre haben gezeigt, daß die Deformationsenergie bei der Kernspaltung entscheidend durch Schaleneffekte bestimmt ist. Es gibt aber einige Anzeichen dafür, daß Schaleneffekte Kerngestalten ohne Symmetrieachse energetisch begünstigen. Rechnungen von Newton³⁾ in einem nicht-axialen Oszillatorpotential, welches für den rotationssymmetrischen Fall in das Nilsson-Potential⁴⁾ übergeht, ergaben minimale Energie bei nicht-axialer Kerngestalt. Für die fünf in ³⁾ berechneten leichten Kerne mit einer Massenzahl $A < 90$ liegt die Energie bei nicht-axialer Deformation um 10-15% unter der Energie eines rotationssymmetrischen Kerns. Für $A=180$ finden Nadjakov et al.⁵⁾ einen nicht-axialen Beitrag zum Trägheitsmoment. Nach dem Davydov-Filippov-Modell⁶⁾ erhält Zaikin⁷⁾ eine Gleichgewichtsgestalt ohne Symmetrieachse für alle Kerne mit nur teilweise besetzter p-Schale.

Seit Strutinsky^{8,9)} in den Sekundärminima der Deformationsenergie eine Erklärung für die von Polikanov et al.¹⁰⁾ und Flerov et al.¹¹⁾ entdeckte Spaltisomerie der Aktiniden gefunden hat, ist der Einfluß immer aufwendigerer rotationssymmetrischer Kerndeformationen auf Lage und Höhe der stationären Punkte der

Deformationsenergie untersucht worden. Das Bestreben war dabei, die Unabhängigkeit der Ergebnisse von der speziellen Parametrisierung zu überprüfen. So haben z.B. Möller et al.¹²⁻¹⁶⁾ und Nilsson et al.¹⁷⁻²¹⁾ in mehreren Arbeiten den Effekt von P_2^- , P_3^- , P_4^- , P_5^- bis P_6^- -Deformationen in der Schalenenergie untersucht, doch blieb der Einfluß möglicher nicht-axialer Deformationen wegen der erwähnten Schwierigkeiten unberücksichtigt. Deshalb ist fraglich, ob diese Ergebnisse für die Spaltbarrieren gegenüber nicht-axialen Deformationen stabil sind.

Für drei Teilgebiete der Kernspaltung sind nicht-axiale Freiheitsgrade besonders wichtig: erstens für die stationären Punkte der Deformationsenergie der Aktiniden, den Grundzustand, das Sekundärminimum, den ersten und zweiten Sattelpunkt. Es ist zu untersuchen, ob die Energie dieser Punkte gegen nicht-axiale Deformationen stabil ist und, falls nicht, wie die scheinbaren Minima und Sattelpunkte durch den neuen Freiheitsgrad zu nicht-axialen Deformationen hin verschoben werden und wie groß der Energiegewinn bei dieser Verschiebung ist. Nach der Strutinsky-Methode liegen die stationären Punkte der Energie bei rotationssymmetrischer Parametrisierung in der Regel zu hoch im Vergleich zu Experimenten, und die Auswirkung höherer Momente ist so gering, daß diese Differenzen bei rotationssymmetrischen Deformationen kaum noch zu verringern sind.

Zweitens sind nicht-axiale Freiheitsgrade wichtig für die Fragmentdeformation am Zerreißpunkt. Bis jetzt ist es nie gelungen, die kinetische und Anregungsenergie der Fragmente in befriedigender Übereinstimmung mit Experimenten zu berechnen. Einige der Diskrepanzen könnten möglicherweise in einer Zerreißpunkt-Konfiguration ohne Symmetrieachse beseitigt werden.

Drittens sind nicht-rotationssymmetrische Deformationen für die Spaltung hypothetischer überschwerer Kerne interessant.

Die Situation ist hier völlig anders als bei den Aktiniden, denn der Grundzustand ist sphärisch, und es ist strittig, ob der Kern wie bei den Aktiniden im Verlauf der Spaltung immer länger wird (Prolatenspaltung^{18,22-29}) oder aber immer mehr abgeplattet, um dann nach nicht-axialer Einschnürung mehrfach zu spalten (Oblatenspaltung³⁰⁻³³). Da nicht-axiale Deformationen beide Spaltungsmöglichkeiten als Grenzfall enthalten, müssen solche für eine Entscheidung über Prolaten- und Oblaten- und damit Zweifach- oder Mehrfachspaltung untersucht werden.

Außerdem ist für überschwere Kerne gerade die Spaltwahrscheinlichkeit die größte Unsicherheit in Schätzungen der Lebensdauer^{18,28}). Sie wird bestimmt durch die Durchdringungswahrscheinlichkeit, also durch Höhe und Form der Barriere. Mögliche geringe Änderungen der Barrierengestalt bei nicht-axialen Deformationen würden die Spaltlebensdauer empfindlich beeinflussen.

Berechenbar ist die Energie nicht-axialer Deformationen nur für dreiaxige Ellipsoide, weil dann der Coulombterm mit Hilfe des Dirichletschen Potentials³⁴) auf ein elliptisches Integral zurückgeführt werden kann. Numerische Rechnungen mit mehr Freiheitsgraden für axiale Deformationen sind zwar geplant, bisher aber noch nicht durchgeführt worden³⁵).

Als Parameterdarstellung dreiaxiger Ellipsoide ist seit Bohr und Mottelson³⁶) (1952) die in β und γ üblich, β für axiale, γ für nicht-axiale Deformationen. Man kann mit dieser einfachsten nicht-axialen Parametrisierung der Kerngestalt nicht den gesamten Verlauf der Kernspaltung vom Grundzustand bis zum Zerreißpunkt verfolgen, doch sind gerade die oben erwähnten, für die Kernspaltung interessantesten Gebiete in dieser Parametrisierung beschreibbar: Für Aktiniden ist die Deformationsenergie zweiachsiger Ellipsoide bis etwa zum zweiten Sattelpunkt realistisch, bei überschweren Kernen bis

weit hinter dem Sattelpunkt, weil dieser bei sehr kleinen Deformationen auftritt.

Nicht-axiale Deformationen der sich berührenden Fragmente können gut durch zwei koaxiale dreiaxige Ellipsoide beschrieben werden, doch ist die Coulomb-Wechselwirkungsenergie der Fragmente bisher noch nie berechnet worden.

Zwei dieser Teilgebiete sind in den letzten Jahren auch von anderen Autoren untersucht worden: So hat Pashkhevich³⁹⁾ für dreiaxige Ellipsoide die Deformationsenergie einiger Aktiniden mit einer Schalenkorrektur nach der Strutinsky-Methode^{8,9)} berechnet. Allerdings wichen hier schon die Ergebnisse für rotationssymmetrische Deformationen erheblich von ähnlichen Rechnungen¹⁸⁾ für axiale Gestalten ab.

Für überschwere Kerne haben Grumann et al.³⁰⁾ und Greiner³³⁾ Flächen der potentiellen Energie für dreiaxige Ellipsoide berechnet, indem sie Einteilchen-Energien aufsummierten. Die Ergebnisse deuteten auf eine Oblaten-Mehrfachspaltung³⁰⁻³³⁾ hin. Bolsterli et al.^{22,23)} haben kürzlich darauf hingewiesen, daß nach Bassichis und Wilets⁴⁰⁾ die Methode von Ref. 30,33) zu falschen Ergebnissen führt. In Ref.³⁸⁾ wurde mit der Schalenkorrektur der vorliegenden Arbeit gezeigt, daß dem Sattelpunkt von 114 X^{298} eine nicht-axiale Kerngestalt entspricht und daraus auf einen Übergang von Oblaten- zu Prolatenspaltung über nicht-axiale Deformationen geschlossen.

Über γ -Deformationen der primären Fragmente ist bisher nichts bekannt.

In der vorliegenden Arbeit werden alle drei durch eine β - γ -Parametrisierung beschreibbaren Teilgebiete der Kernspaltung behandelt. Die Berechnung der Deformationsenergie wurde durch eine semi-empirische Schalenkorrektur ermöglicht, die in Ref.^{41,42)} für rotationssymmetrische Deformationen angewandt worden ist. In der allgemeinen Form ist diese Schalenkorrektur ein krümmungsabhängiges Integral über die Kernoberfläche. Für nicht-axiale Kerngestalten werden in Abschnitt II und III und im Anhang A.I die für diesen Schalenterm und für andere Beiträge zur Bindungsenergie benötigten Relationen

entwickelt.

In IV wird der Einfluß des nicht-axialen Freiheitsgrades auf die stationären Punkte der Deformationsenergie von zwölf Aktiniden untersucht. Erste Ergebnisse für einige der Kerne sind in Ref. ³⁷⁾ in einer aus programmtechnischen Gründen vom Üblichen abweichenden Parametrisierung angegeben.

Nicht-axiale Fragmentdeformationen und ihre Auswirkung auf kinetische und Anregungsenergien der Fragmente werden in V diskutiert und numerische Ergebnisse für einige Fragmentpaare des Compoundkerns U^{236} angegeben. Dafür mußte eine Methode gefunden werden, um die Coulomb-Wechselwirkungsenergie zweier dreiachsiger Ellipsoide mit genügender Genauigkeit zu berechnen. Das Integrationsverfahren ist in Anhang A.II angegeben.

Im letzten Abschnitt VI wird die Deformationsenergie von acht hypothetischen Kernen in der Nähe der magischen Zahlen $Z=114$ und $N=184$ als Funktion von β und γ behandelt. Dabei wird die Auswirkung des γ -Freiheitsgrades auf die Deformation minimaler Energie und auf die Spaltlebensdauer untersucht.

II Parametrisierung und differentialgeometrische Eigenschaften nichtaxialer Kerngestalten

Um die Deformationsenergie eines Kerns im Verlauf der Kernspaltung zu berechnen, ist es wichtig, eine geeignete Parametrisierung der Kerngestalt zu finden. Da man die Probleme analytisch oder mit Computern durchrechnen will, kann man nicht alle denkbaren Kerngestalten untersuchen. Es ist vielmehr notwendig, sich auf eine Schar zu beschränken, die hinreichend allgemein, aber analytisch möglichst einfach ist und die zu beschreibenden Vorgänge in guter Näherung wiedergibt. Damit man die Rechnungen überhaupt durchführen kann, muß man versuchen, die Kernoberfläche mit möglichst wenig Parametern zu beschreiben. Welche Parametrisierung die bestmögliche ist, hängt weitgehend vom betrachteten Problem ab.

II.1 Rotationssymmetrische Parametrisierung

Ursprünglich sind alle Kerne als kugelförmig angenommen worden⁴³⁻⁴⁸⁾. Sphärische Modelle beschreiben aber experimentelle Daten nur für Massenzahlen in der Nähe abgeschlossener Schalen befriedigend. Bei Kernen, die weit von abgeschlossenen Schalen entfernt sind, weisen viele Experimente darauf hin, daß man eine stabile Gleichgewichtsdeformation annehmen muß. Wichtige experimentelle Fakten, die auf eine Deformation im Grundzustand schließen lassen, sind das Auftreten von Rotationsbanden, die Werte der Trägheitsmomente, der Quadrupol- und höheren Multipolmomente. Man hat z.B. zigarrenförmige Deformation (Prolaten) für Lanthaniden ($\delta \approx 0.25$) und für $A \approx 25$ kommen scheibenförmige Kerne (Oblaten) vor.

Zur Berechnung der potentiellen Energie nach dem Tröpfchenmodell wurde in den ältesten Arbeiten der Radiusvektor

des Tropfens meist nach Kugelflächenfunktionen (Bohr⁶³⁾ 1952)

$$R(\theta, \phi) = R_c \left(1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \beta_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi) \right) \quad (\text{II.1.1})$$

im rotationssymmetrischen Fall nach Legendre-Polynomen (Bohr und Wheeler¹⁾ 1939)

$$R(\theta) = R_c \left(1 + \sum_{l=2}^{\infty} \alpha_l P_l(\cos\theta) \right) \quad (\text{II.1.2})$$

entwickelt und die Gestalt des Kerns durch die Koeffizienten dieser Entwicklung teils um eine Kugel^{1,49-58)}, teils um ein Rotationsellipsoid⁵²⁻⁵⁸⁾ berechnet.

Die Deformationsenergie konnte zum Teil analytisch angegeben werden, mußte bei stark deformierten Kernen aber meistens numerisch berechnet werden⁵⁹⁻⁶³⁾. So wurden in der Arbeit von Bohr und Wheeler¹⁾ in der rotationssymmetrischen Entwicklung die geraden Terme der Entwicklung nach Legendre-Polynomen bis zur Ordnung 4, bei Frankel und Metropolis⁵⁹⁾ bis zur Ordnung 10 und bei Cohen und Swiatecki^{60,61)} bis zur Ordnung $l=18$ benutzt. Um den Kern während der Spaltprozesses bei asymmetrischer Deformation zu studieren, wurden in einigen Arbeiten außer den geraden Entwicklungskoeffizienten auch noch ungerade berücksichtigt, so z.B. in den Rechnungen von Möller et al.¹⁴⁾ für ϵ_3 - und ϵ_5 -Deformationen.

Zur Beschreibung von Grundzustandsdeformationen kann man zunächst versuchen, mit Deformationen nahe der Kugel auszukommen, die noch weniger freie Parameter haben als die oben genannten. Als einfachste derartige Möglichkeit bieten sich Ellipsoide an, die für drei verschieden große Achsen durch zwei Parameter (z.B. β und γ) und bei zusätzlicher Rotationssymmetrie sogar mit einem Deformationsparameter (z.B. β oder δ oder ξ) beschrieben werden können. Die zusätzliche Einschränkung auf Rotationssymmetrie des Kerns ist in der Literatur deshalb

so verbreitet, weil sich viele Größen, wie z.B. das innere Quadrupolmoment, Oberflächenenergie, Coulombenergie oder die elektrostatische Wechselwirkungsenergie, wie sie zwischen den Spaltfragmenten auftritt, für Rotationsellipsoide analytisch ausrechnen lassen. Für allgemeinere Rotationskörper lassen sie sich zumindest auf eine dreifache Integration zurückführen. Da man die auftretenden Integrationen meist nur noch numerisch ausführen kann, bedeutet jede weitere Integration einen vielfachen Aufwand an Rechenzeit.

Ein weiterer numerischer Gesichtspunkt ist das Minimalisieren. Oft ist die Deformation minimaler Energie interessant, das heißt aber, man muß das Minimum der gestaltabhängigen Energie bezüglich einiger der Gestaltparameter bei vorgegebenem Kern suchen. Als Nebenbedingung wird dabei das Volumen des Kerns festgehalten. Hat man nur einen Deformationsparameter, muß man das Minimum auf einem Intervall suchen. Dies ist aber einfacher als in einem zwei- oder mehrdimensionalen Gebiet, denn die Zahl der dazu zu berechnenden Funktionswerte wächst schneller als linear mit der Dimension des Gebietes.

Ausgehend von den verschiedenen Modellvorstellungen wurden in ~~vielen~~ Arbeiten unterschiedliche Parametrisierungen eingeführt, die für das jeweilige Modell besonders zweckmäßig waren. Als einfachste Klasse von Deformationen sind Ellipsoide zu nennen. Diese gehen bei Rotationssymmetrie durch Verzerrung in einer einzigen Richtung aus Kugeln hervor. Die Drehflächen (Ellipsen) können durch senkrecht-affine Abbildung von Kreisen gewonnen werden. Da die Gestalt von Rotationsellipsoiden mit festem Volumen durch nur eine Größe, z.B. durch die Länge einer Achse, festgelegt werden kann, ist dann die Kerngestalt durch nur einen Parameter beschreibbar. Die Parameter sind üblicherweise nach dem Nilsson-Modell⁶⁴⁾ δ bzw. ϵ , mit den Halbachsen a, b und c für den Parameter δ :

$$a^2=b^2 = \frac{R^2(\delta)}{1 + \frac{2}{3}\delta} \quad \text{und} \quad c^2 = \frac{R^2(\delta)}{1 - \frac{4}{3}\delta} \quad (\text{II.1.3})$$

oder für den Parameter ϵ :

$$a=b = \frac{R(\epsilon)}{1 + \frac{1}{3}\epsilon} \quad \text{und} \quad c = \frac{R(\epsilon)}{1 - \frac{2}{3}\epsilon} \quad (\text{II.1.4})$$

Für beide Möglichkeiten wird $R(\delta)$ bzw. $R(\epsilon)$ durch die Volumenerhaltung bestimmt.

II.2 Nicht-axiale Ellipsoide

Betrachtet man nicht-rotationssymmetrische Kerngestalten, so ist die einfachste kugelähnliche Gestalt das Ellipsoid mit drei verschieden großen Achsen. Dafür sind in der Literatur zwei Parametrisierungen üblich: erstens die nach Hill und Wheeler⁶⁵⁾ im Kollektivmodell, wobei die drei Ellipsoidhalbachsen a, b, c durch folgende Formeln gegeben sind:

$$a = R(\sigma, \gamma) \exp(\sigma \cos(\gamma - \frac{2}{3}\pi))$$

$$b = R(\sigma, \gamma) \exp(\sigma \cos(\gamma + \frac{2}{3}\pi)) \quad (\text{II.2.1})$$

$$c = R(\sigma, \gamma) \exp(\sigma \cos \gamma)$$

σ wird in vielen Arbeiten auch mit α bezeichnet. α bzw. σ sind ein Maß für die longitudinale Deformation, der Winkel γ ist ein Maß für das Abweichen von der Rotationssymmetrie. Für $\gamma=0$ hat man prolatenförmige Gestalt, die Halbachsen a und b stimmen überein ($a=b$), für $\gamma=60^\circ$ erhält man oblatenförmige Kerne ($a=c$), und für $\sigma=0$ hat der Kern kugelförmige Gestalt.

Für Winkel zwischen 0° und 60° hat man ein nicht-axialsymmetrisches Ellipsoid.

Es genügt, den Bereich mit $0^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$ zu betrachten, da für andere Winkel sich die Deformation mit zyklisch vertauschten Halbachsen wiederholt.

Bohr und Mottelson³⁶⁾ haben die Deformationsparameter β und γ ($\neq \gamma_{\text{Hill-Wheeler}}$) eingeführt. Die Ellipsoid-Halbachsen sind in dieser Parametrisierung:

$$\begin{aligned} a &= R(\beta, \gamma) \left\{ 1 - \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) \right\} \\ b &= R(\beta, \gamma) \left\{ 1 - \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) \right\} \\ c &= R(\beta, \gamma) \left\{ 1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta \cos \gamma \right\} \end{aligned} \quad (\text{II.2.2})$$

Die entsprechende Symmetrie ist in Abb. 1 dargestellt.

II.3 Deformationsenergie und Differentialgeometrie

Die Deformationsenergie besteht in der vorliegenden Arbeit aus Coulombenergie, einem Oberflächenterm mit einem Symmetrieenergieanteil und einer krümmungsabhängigen Schalenkorrektur. Für die drei letzteren werden einige differentialgeometrische Relationen benötigt, die in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels für nicht-axiale Ellipsoide abgeleitet werden. Für die Oberflächenenergie wird die Kernoberfläche durch Gaußsche Koordinaten (II.4) parametrisiert und dafür der metrische Fundamentaltensor (II.5) berechnet. Die Schalenkorrektur des Kerns ist ein mit einer effektiven Krümmung gewichtetes Mittel von Schalenenergien sphärischer Kerne. Diese setzt sich aus

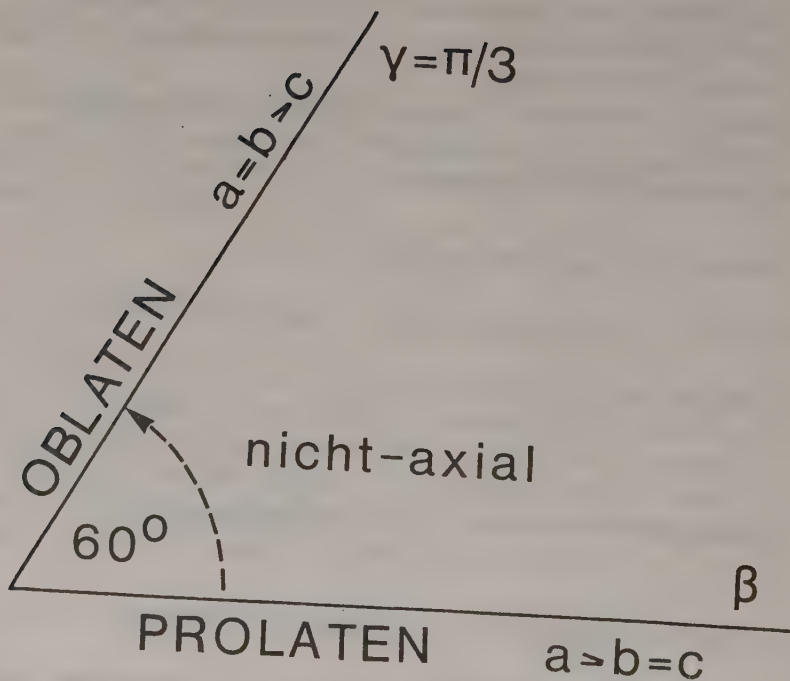


Abb.1. Parametrisierung (II.2.2) dreiachsiger Ellipsoide nach Bohr und Mottelson³⁶⁾ für $0 \leq \beta < \infty$ und $0 \leq \gamma \leq \pi/3$.

einem lokalen Anteil (II.6) und einem globalen (II.7) zusammen. Der dazu benötigte zweite Fundamentaltensor nicht-axialer Ellipsoide wird in (II.6) bestimmt.

II.4 Gaußsche Koordinaten

Im Folgenden werden Kerndeformationen ausschließlich durch eine Schar von Ellipsoiden mit den Halbachsen x_0, y_0, z_0

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} + \frac{z^2}{z_0^2} = 1 \quad (\text{II.4.1})$$

mit konstantem Volumen

$$V = \frac{4\pi}{3} x_0 y_0 z_0 = \frac{4\pi}{3} R_c^3 \quad (\text{II.4.2})$$

beschrieben. Eine der Halbachsen läßt sich durch die Forderung der Volumenerhaltung bei Deformationen eliminieren. Daher ist das Ellipsoid durch zwei voneinander unabhängige Parameter, z.B. x_0 und y_0 , zu beschreiben.

Als Gaußsche Koordinaten der Ellipsoidoberfläche S werden die Zylinderkoordinaten z und φ gewählt. Ist $\vec{r}$ der Ortsvektor des Punktes P , so ist

$$S = \{ \varphi \mid \vec{r}(z, \varphi) = (x(z, \varphi), y(z, \varphi), z) \} \quad (\text{II.4.3})$$

und das zugrundeliegende Parametergebiet $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G} = \{ z \in (-z_0, z_0), \varphi \in (0, 2\pi) \} \quad (\text{II.4.4})$$

Wie man aus den Randkurven geeigneter Schnittflächen senkrecht zur z -Achse berechnen kann, gilt für $x(z, \varphi)$ und $y(z, \varphi)$

$$x(z, \varphi) = x_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{z_0^2}} \cos \varphi \quad (\text{II.4.5})$$

$$y(z, \varphi) = y_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{z_0^2}} \sin \varphi \quad (\text{II.4.6})$$

Als Relation der Fläche ergibt sich also

$$S = \{ \varphi | \varphi(z, \varphi) = (x_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{z_0^2}} \cos \varphi, y_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{z_0^2}} \sin \varphi, z) \} \quad (\text{II.4.7})$$

mit dem Parametergebiet $\mathcal{Q}$.

z, φ ist eine zulässige Parameterdarstellung von S bezüglich 2, da $\varphi(z, \varphi)$ zweimal stetig differenzierbar ist und außerdem gilt (vgl. z.B. Ref. 66-68),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \neq 0 \quad \text{für alle } z, \varphi \in \mathcal{Q}. \quad (\text{II.4.8})$$

z, φ sind daher Gaußsche Koordinaten des Flächenstücks. Sie bilden aber kein orthogonales Gaußsches Koordinatensystem, d.h. die Parameterlinien für $\varphi = \text{const}$ bzw. $z = \text{const}$ stehen im Gegensatz zu den Meridianen und Parallelkreisen eines Drehkörpers bei dreiachsigen Ellipsoiden nicht senkrecht aufeinander.

$$\varphi(z, \varphi = \text{const}) \neq \varphi(z = \text{const}, \varphi) \quad (\text{II.4.9})$$

Das ist der Grund für einige Komplikationen bei der Berechnung der Deformationsenergie. Die Beziehung (II.4.9) kann leicht bewiesen werden, wenn der metrische Fundamentaltensor g_{ij} bekannt ist (s. II.5). Seine Nebendiagonalglieder sind nämlich von Null verschieden. Das ist äquivalent zu (II.4.9).

II.5 Metrischer Fundamentaltensor und Flächeninhalt

Zur Berechnung der Oberflächenenergie des Ellipsoids muß man den metrischen Fundamentaltensor (oder ersten Fundamentaltensor) des Flächenstücks (II.4.3) kennen. Ist g die Determinante des metrischen Fundamentaltensors und sind g_{ij} seine Komponenten, so ist die Fläche $|S|$ das folgende Integral

$$|S| = \iint_{\mathcal{Q}} dS = \iint_{\mathcal{Q}} \sqrt{g} \, dz \, d\varphi \quad (\text{II.5.1})$$

$$\text{mit } g = \det(g_{ij}). \quad (\text{II.5.2})$$

Für die Komponenten des metrischen Fundamentaltensors g_{ij}

$$g_{ij} = \varrho_i \varrho_j \quad \text{mit } i, j = z \text{ bzw. } \varphi \quad (\text{II.5.3})$$

$$\text{und } \varrho_z = \frac{\partial \varrho}{\partial z}, \quad \varrho_\varphi = \frac{\partial \varrho}{\partial \varphi} \quad (\text{II.5.4})$$

gilt im Spezialfall des Ellipsoids (II.4.1)

$$g_{zz} = \frac{z^2}{z_0^2(z_0^2 - z^2)} \{ x_0^2 \cos^2 \varphi + y_0^2 \sin^2 \varphi \} + 1 \quad (\text{II.5.5})$$

$$g_{\varphi\varphi} = \left(1 - \frac{z^2}{z_0^2} \right) \{ x_0^2 \sin^2 \varphi + y_0^2 \cos^2 \varphi \} \quad (\text{II.5.6})$$

$$g_{z\varphi} = g_{\varphi z} = \frac{z(x_0^2 - y_0^2)}{z_0^2} \cos \varphi \sin \varphi \quad (\text{II.5.7})$$

Die Determinante des ersten Fundamentaltensors ist:

$$g = \det(g_{ij}) = \frac{z^2}{z_0^2} x_0^2 y_0^2 + \left(1 - \frac{z^2}{z_0^2} \right) \{ x_0^2 \sin^2 \varphi + y_0^2 \cos^2 \varphi \} \quad (\text{II.5.8})$$

und damit die Oberfläche des Ellipsoids

$$|S| = \iint_{\mathcal{G}} \sqrt{g} \, dz \, d\varphi = \quad (II.5.9)$$

$$= \iint_{\mathcal{G}} |\mathbf{e}_z \, dz + \mathbf{e}_\varphi \, d\varphi| = \iint_{\mathcal{G}} |\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\varphi| \, dz \, d\varphi$$

Führt man die Integration aus, so ergeben sich drei Fälle je nach dem Verhältnis der Halbachsen des Ellipsoids. Mit den Abkürzungen

$$c = x_0^2 \sin^2 \varphi + y_0^2 \cos^2 \varphi \quad w = 1 - c \frac{z_0^2}{x_0^2 y_0^2} \quad (II.5.10)$$

und

$$a = \frac{x_0^2 y_0^2}{z_0^4} - \frac{c}{z_0^2} \quad (II.5.11)$$

erhält man die drei Fälle, wenn a größer, gleich oder kleiner Null ist.

$$|S| = \begin{cases} 2\pi x_0 y_0 + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{c z_0^2}{x_0 y_0} \frac{1}{\sqrt{w}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} \right| & \text{für } a > 0 \\ 4\pi x_0 y_0 & \text{für } a = 0 \\ 2\pi x_0 y_0 + \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{c}{\sqrt{-a}} \arcsin \sqrt{\frac{-a}{c}} z_0 & \text{für } a < 0 \end{cases} \quad (II.5.12)$$

Für Rotationsellipsoide lassen sich die Integrale explizit angeben; man erhält für die Oberfläche des Ellipsoids mit der Relation

$$\frac{\rho^2}{\rho_0^2} + \frac{z^2}{z_0^2} = 1 \quad , \quad (II.5.13)$$

wobei z_0 die halbe Drehachse und ρ_0 die Halbachse senkrecht dazu ist:

$$|S| = \begin{cases} 2\pi \left\{ \rho_0^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_0 z_0^2}{\sqrt{\rho_0^2 - z_0^2}} \ln \left| \frac{\rho_0 + \sqrt{\rho_0^2 - z_0^2}}{\rho_0 - \sqrt{\rho_0^2 - z_0^2}} \right| \right\} & \text{für Oblate} \\ & (z_0 < \rho_0) \\ 4\pi \rho_0^2 & \text{für Kugel (II.5.14)} \\ & (z_0 = \rho_0) \\ 2\pi \left\{ \rho_0^2 + \frac{\rho_0 z_0^2}{\sqrt{z_0^2 - \rho_0^2}} \arcsin \sqrt{1 - \frac{\rho_0^2}{z_0^2}} \right\} & \text{für Prolate} \\ & (z_0 > \rho_0) \end{cases}$$

II.6 Zweiter Fundamentaltensor und Hauptkrümmungen

Zur Berechnung der Hauptkrümmungen in einem Punkt der Fläche muß man außer den Komponenten des kontravarianten ersten Fundamentaltensors g^{ij} noch die des zweiten Fundamentaltensors der Flächentheorie L_{ij} kennen. Für die Matrizen der kovarianten und kontravarianten Form des ersten Tensors gilt folgende Beziehung

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} \quad (II.6.1)$$

und

$$g_{iv} g^{vj} = \delta_i^j \quad \text{mit} \quad (\delta_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (II.6.2)$$

(Einsteinsche Summenkonvention). Daher ergeben sich die Komponenten g^{zz} , $g^{\varphi\varphi}$, und $g^{z\varphi}$ zu:

$$g^{zz} = \frac{z_0^2 (z_0^2 - z^2)}{z^2 (x_0^2 \cos^2 \varphi + y_0^2 \sin^2 \varphi) + z_0^2 (z_0^2 - z^2)} \quad (II.6.3)$$

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{z_0^2}{(z_0^2 - z^2)(x_0^2 \sin^2 \varphi + y_0^2 \cos^2 \varphi)} \quad (\text{II.6.4})$$

$$g^{z\varphi} = g^{\varphi z} = - \frac{z(x_0^2 - y_0^2)z_0^2 \cos \varphi \sin \varphi}{(x_0^2 \sin^2 \varphi + y_0^2 \cos^2 \varphi) \{ z^2 (x_0^2 \cos^2 \varphi + y_0^2 \sin^2 \varphi) + z_0^2 (z_0^2 - z^2) \}} \quad (\text{II.6.5})$$

Für die Komponenten des zweiten Fundamentaltensors L_{ij} gilt, wenn $\mathfrak{n}$ der Normalenvektor im Punkt P der Fläche und g die Determinante des metrischen Fundamentaltensors ist:

$$L_{ij} = \mathfrak{r}_{ij} \mathfrak{n} = \mathfrak{r}_{ij} \frac{\mathfrak{r}_z^x \mathfrak{r}_\varphi}{|\mathfrak{r}_z^x \mathfrak{r}_\varphi|} = \mathfrak{r}_{ij} \frac{\mathfrak{r}_z^x \mathfrak{r}_\varphi}{\sqrt{g}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \mathfrak{r}_{ij} \\ \mathfrak{r}_z \\ \mathfrak{r}_\varphi \end{vmatrix} \quad (\text{II.6.6})$$

wenn $\mathfrak{r}_{ij}$ die Ableitungen von $\mathfrak{r}$ nach z bzw. φ bedeuten, z.B.

$$\mathfrak{r}_{z\varphi} = \frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial z \partial \varphi} \quad \text{u.s.w.} \quad (\text{II.6.7})$$

Für den Fall der dreiachsigen Ellipsoide ergibt sich damit

$$L_{zz} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{x_0 y_0}{z_0^2 - z^2} \quad (\text{II.6.8})$$

$$L_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{x_0 y_0 (z_0^2 - z^2)}{z_0^2} \quad (\text{II.6.9})$$

$$L_{z\varphi} = L_{\varphi z} = 0 \quad (\text{II.6.10})$$

Die Hauptkrümmungen K_1 und K_2 des Flächenstücks sind die Extrema der Krümmungen aller Normalschnitte durch diesen Flächenpunkt. Da die Matrix (L_{ij}) Diagonalform hat, lassen sich die Hauptkrümmungen einfacher als Eigenwerte der Matrix

$$((L_{ij})(g_{ij})^{-1}) \quad (\text{II.6.11})$$

bestimmen:

$$K_1 = L_{zz} g^{zz} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{x_0 y_0 z_0^2}{z^2 (x_0^2 \cos^2 \varphi + y_0^2 \sin^2 \varphi) + z_0^2 (z_0^2 - z^2)} \quad (\text{II.6.12})$$

$$K_2 = L_{\varphi\varphi} g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{x_0 y_0}{x_0^2 \sin^2 \varphi + y_0^2 \cos^2 \varphi} \quad (\text{II.6.13})$$

Entsprechend gilt für die Hauptkrümmungsradien:

$$R_1 = \sqrt{g} \frac{z^2 \{ (x_0^2 \cos^2 \varphi + y_0^2 \sin^2 \varphi) - z_0^2 \} + z_0^4}{x_0 y_0 z_0^2} \quad (\text{II.6.14})$$

und

$$R_2 = \sqrt{g} \frac{x_0^2 \sin^2 \varphi + y_0^2 \cos^2 \varphi}{x_0 y_0} \quad (\text{II.6.15})$$

Die Hauptkrümmungen hängen außer von z noch vom Winkel φ ab und sind daher nicht so einfach geometrisch zu deuten wie bei Rotationsellipsoiden. Im rotationssymmetrischen Fall sind die Krümmungslinien, d.h. die Linien in denen die Krümmung in jedem Punkt extremal ist, nämlich gerade die Meridiane und Breitenkreise. Da die Parameterlinien genau dann Krümmungslinien sind, wenn $g_{12} = L_{12} = 0$ ist, bildet das (z, φ) -System im nicht rotationssymmetrischen Fall kein Netz von Krümmungslinien. Dies geht auch schon daraus hervor, daß die beiden Hauptkrümmungsrichtungen senkrecht aufeinander stehen, die Parameterlinien sich für allgemeine Ellipsoide aber nicht orthogonal schneiden.

II.7 Mittlerer Krümmungsradius

Die Schalenkorrektur der vorliegenden Arbeit wird überwiegend durch den mittleren Kernradius $\bar{R}$ bestimmt, der durch das Oberflächenintegral über die lokale Krümmung

$$\frac{1}{\bar{R}} = \frac{\int \frac{1}{R} dS}{\int dS} \quad (\text{II.7.1})$$

mit

$$R = (R_1 + R_2)/2 \quad (\text{II.7.2})$$

definiert ist. Diese Form des mittleren Kernradius (II.7.1) ist schon von Strutinsky und Tyapin¹¹⁷⁾ und Hilf und Süßmann¹¹⁸⁾ in Korrekturen zur Oberflächenspannung der Kernmaterie benutzt worden.

Wieder kann man drei Fälle unterscheiden, je nach dem Verhältnis der Halbachsen des Ellipsoids zueinander. Im rotationssymmetrischen Fall entsprechen dem gerade prolaten-, kugel- und oblatenförmige Ellipsoide. Für $1/\bar{R}$ erhält man:

$$\frac{1}{\bar{R}} = \begin{cases} \left\{ 16 x_0 y_0 z_0 \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{\sqrt{cb}} \arctan \sqrt{\frac{b}{c}} \right\} / |S| & \text{für } b > 0 \\ \frac{8\pi x_0 y_0 z_0}{x_0^2 + y_0^2} / |S| & \text{für } b = 0 \\ \left\{ 16 x_0 y_0 z_0 \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{2\sqrt{-bc}} \ln \frac{\sqrt{c} + \sqrt{-b}}{\sqrt{c} - \sqrt{-b}} \right\} / |S| & \text{für } b < 0 \end{cases} \quad (\text{II.7.3})$$

mit

$$b = x_0^2 \cos^2 \varphi + y_0^2 \sin^2 \varphi - z_0^2 \quad (\text{II.7.4})$$

und

$$c = x_0^2 \sin^2 \varphi + y_0^2 \cos^2 \varphi + z_0^2 \quad (\text{II.7.5})$$

wobei für $|S|$ der den Halbachsen x_0, y_0, z_0 entsprechende Wert (II.5.12) bzw. (II.5.14) einzusetzen ist.

III Bindungs- und Deformationsenergie

In diesem Abschnitt sollen die einzelnen Terme der Deformationsenergie der Aktiniden (IV) und überschweren Kerne (VI) sowie die Bindungsenergie der Fragmente (V) angegeben werden. Die Tröpfchenmodell-Anteile stimmen im wesentlichen mit denen der weit verbreiteten Massenformel von Myers und Swiatecki⁶⁹⁻⁷²⁾ überein. Für die Schalenkorrektur wird die Schalenfunktion^{71,72)} sphärischer Kerne aus der obigen Massenformel benutzt. Für Rotationskörper ist die potentielle Energie der vorliegenden Arbeit mit der nach Ref.⁴¹⁾ identisch. Sie hat die folgende allgemeine Form:

$$\begin{aligned} & \text{-Bindungsenergie} = \text{Volumenterm mit Symmetrieanteil} \\ & \quad + \text{Oberflächenterm mit Symmetrieanteil} \\ & \quad + \text{Coulomb-Energie mit Korrektur für diffusen Kernrand} \\ & \quad + \text{Paarenergie} \\ & \quad + \text{Schalenkorrektur} \\ & = E_V + E_S + E_C + E_P + E_{SH} \quad \text{--- (III.0.1)} \end{aligned}$$

III.1 Tröpfchenmodell-Terme

Als Volumenenergie E_V wird die von Myers und Swiatecki⁶⁹⁻⁷²⁾ mit den Parametern von ^{71,72)} übernommen. Sie enthält im Gegensatz zu den älteren Massenformeln⁸⁹⁾ (v. Weizsäcker⁴³⁾, Bethe^{47,48)} und Bacher⁴⁸⁾, Green und Edwards⁷³⁾) auch einen zum Kernvolumen proportionalen Anteil

der Symmetrieenergie, wie er schon von Cameron und Elkin⁷⁴⁾ vorgeschlagen worden ist. Wegen der hier angenommenen Inkompressibilität der Kernmaterie^{2,83-87)} tritt dieser Anteil in der Deformationsenergie nicht auf. Der Rest der Symmetrieenergie wird proportional zur Oberfläche angenommen. Der Oberflächenterm in der Deformationsenergie der vorliegenden Arbeit enthält deshalb außer der klassischen Oberflächenspannung noch diesen durch das Pauli-Prinzip bedingten Symmetrieanteil. Diese beiden Terme lauten

$$E_V = -a_1 \left\{ 1 - \alpha \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 \right\} A \quad (\text{III.1.1})$$

mit den Parametern⁷¹⁾ $a_1 = 15.4941$ MeV und $\alpha = 1.7826$ und

$$E_S = a_2 \left\{ 1 - \alpha \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 \right\} A^{2/3} \frac{|S|}{4\pi R_c^2} \quad (\text{III.1.2})$$

mit der Kernoberfläche $|S|$ und den Parametern $a_2 = 17.9439$ MeV und $R_c = r_c A^{1/3}$, $r_c = 1.2249$ fm. Die Oberfläche $|S|$ ist in (II.5.12) und (II.5.14) angegeben. Das Verhältnis B_s der Kernoberfläche zu der einer volumengleichen Kugel wird numerisch integriert - im Gegensatz zu Myers und Swiatecki^{69,70)}, die für Rotationskörper eine Reihenentwicklung benutzen.

Die elektrostatische Energie E_c ist im Anhang A.I angegeben. Eine Korrektur zur Coulombenergie, die den Ladungsdichteabfall an der Kernoberfläche⁷⁵⁻⁸⁰⁾ berücksichtigt, wird von Myers und Swiatecki übernommen. Diese praktisch deformationsunabhängige⁶⁹⁾ Korrektur zu E_c ist:

$$- \frac{\pi^2}{2} \frac{e^2}{r_c} \left(\frac{d}{r_c} \right)^2 \frac{Z^2}{A} \quad (\text{III.1.3})$$

mit den Parametern r_c und $d = 0.5461$ fm; d ist ein Maß für die Oberflächendicke der Fermi-Verteilung, die für die Ladungsdichte angenommen wird. Die Größe von d ist aus Stanforder

Elektronenstreuexperimenten^{76,77,81,82)} bestimmt.

Die Paarenergie hat die Form von Green und Edwards⁷³⁾ und Wapstra⁸⁸⁾

$$\delta = \begin{cases} 11 \text{ MeV/A}^{1/2} & \text{für uu-Kerne} \\ 0 & \text{für ug- und gu-Kerne} \\ -11 \text{ MeV/A}^{1/2} & \text{für gg-Kerne} \end{cases} \quad (\text{III.1.4})$$

Die Paarenergie ist zwar wie die Volumenenergie bei vorgegebenem Kern deformationsunabhängig, tritt aber in der Deformationsenergie des Compoundkerns am Zerreißpunkt wegen der variablen Fragmentmassen auf.

III.2 Schalenenergie

Vor Strutinskys Schalenkorrektur, die heute sehr weit verbreitet ist^{13-15,19,20,22,23,25,26,28,29,39,94-110)}, wurde in der Literatur eine Reihe von möglichen semi-empirischen Schalenkorrekturen zur Tröpfchenmodell-Massenformel angegeben^{69-72,74,111-115)}. Die erfolgreichste dieser Massenformeln mit Schalenenergie ist die von Myers und Swiatecki⁶⁹⁻⁷²⁾. Sie beschreibt Massen und Grundzustandsdeformationen sehr gut, die Schalenkorrektur hat aber den Nachteil, daß sie exponentiell abklingt mit zunehmender Deformation.

In einer früheren Arbeit⁴¹⁾ wurde vorgeschlagen, die Schalenenergie eines beliebig deformierten Kerns als Summe über die Schalenkorrekturen sphärischer Segmente zu schreiben, die der Kernoberfläche möglichst gut angepaßt sind. Die Krümmung der Kernoberfläche bestimmt dabei die Größe (den Radius, die Neutronen- bzw. Protonenzahl) des sphärischen Segments, die Schalenfunktion^{71,72)} von Myers und Swiatecki seine Schalenenergie.

Es hat sich gezeigt⁴¹⁾, daß der Schaleneffekt des deformierten Kerns nicht nur durch die lokale Krümmung bestimmt wird, sondern außerdem noch ein globaler Effekt der mittleren Krümmung der gesamten Kernoberfläche berücksichtigt werden muß. Der Anteil des globalen Effekts ergab sich aus einer Anpassung an gemessene $B(E_2)$ -Werte¹¹⁶⁾ von etwa 50 Kernen. Der effektive Kernradius R_{eff} ist nach dieser Anpassung⁴¹⁾

$$R_{\text{eff}}^{-1} = 0.3 K + 0.7 \bar{K} \quad (\text{III.2.1})$$

Benutzt man für die Schalenenergie des sphärischen Kerns (N, Z, A) die von Myers und Swiatecki⁶⁹⁻⁷²⁾ angegebene Schalenfunktion $S(N, Z)$, die der Relation

$$S(N, Z) = C \left\{ \frac{F(N) + F(Z)}{(A/2)^{2/3}} - cA^{1/3} \right\} \quad (\text{III.2.2})$$

genügt, mit den Parametern $C=5.8$ MeV und $c=0.325$ und mit

$$F(m) = \frac{3}{5} \frac{M_i^{5/3} - M_{i-1}^{5/3}}{M_i - M_{i-1}} (m - M_{i-1}) - \frac{3}{5} (m^{5/3} - M_{i-1}^{5/3}) \quad (\text{III.2.3})$$

wobei m zwischen den magischen Zahlen M_{i-1} und M_i liegt, so ergibt sich die Schalenenergie des Kerns zu

$$E_{\text{SH}} = \int \frac{S(N^+(R_{\text{eff}}), Z^+(R_{\text{eff}}))}{4\pi R_{\text{eff}}^2} dS \quad (\text{III.2.4})$$

mit $A^+(R)/A = R^3/R_c^3$.

IV Abweichungen von der Rotationssymmetrie in den Spaltbarrieren der Aktiniden

In diesem Abschnitt soll der Einfluß des γ -Freiheitsgrades auf die Potentialfläche für einige Aktiniden untersucht werden. Es wurde die Deformationsenergie von insgesamt 16 Kernen berechnet - und zwar für einige Isotope von Th, U, Pu, Cm, Cf und Fm.

Außer den erwähnten Arbeiten von Pashkevich³⁹⁾ und Ref.³⁷⁾ sind Untersuchungen im Bereich der Aktiniden bisher nicht publiziert worden. Zwei weitere Rechnungen zu diesem Thema sind noch unveröffentlicht^{108,120)}; sichere experimentelle Informationen dazu sind bis jetzt nicht verfügbar.

IV.1 Flächen der potentiellen Energie

Den ersten Hinweis auf nicht-axiale Deformationen bei der Kernspaltung hat Pashkevich³⁹⁾ 1969 gegeben. Mit Strutinskys Computer-Programm hat er Schalenkorrekturen auch für nicht-axiale Kerndeformationen (dreiachsige Ellipsoide) berechnet und gezeigt, daß bei einigen der schwereren Aktiniden der erste Sattelpunkt der potentiellen Energie zwischen Grundzustand und isomerem Zustand einer nicht-axialen Deformation entspricht. Leider ist die Rechnung nicht ganz befriedigend, weil die Ergebnisse, soweit sie axial-symmetrische Deformationen betreffen, nicht gut mit den Ergebnissen anderer Arbeiten, z.B. von Nilsson et al.¹⁸⁾, übereinstimmen. So sind die β -Werte der Sekundärminima im allgemeinen zu hoch, und für einige der berechneten Kerne fehlen die zweiten Minima und die zweiten Barrieren überhaupt, obwohl sie experimentell¹²¹⁻¹³⁰⁾ bestätigt sind.

In der vorliegenden Arbeit wird die potentielle Energie

nach der in Abschnitt III beschriebenen Methode berechnet. Da die Ergebnisse dieser Rechnung gut mit denen von Ref.¹⁸⁾ für rotationssymmetrische Gestalten übereinstimmen, kann man hoffen, daß sie auch im nicht-axialen Fall zuverlässig sind. Die folgenden Abb. 2a-2l sind Schichtlinienbilder der potentiellen Energie als Funktion von β und γ . Der Koordinatenursprung $\beta=0, \gamma=0^\circ$ entspricht der Kugel als Kerngestalt. Die Koordinatenachsen ($\gamma=0, \gamma=60^\circ$) sind rotationssymmetrischen Kerngestalten zugeordnet: Für $\gamma=0, \beta>0$ ist der Kern prolaten-, für $\gamma=60^\circ$ und $\beta>0$ ist er oblatenförmig. Der Bereich $\beta>0, 0^\circ<\gamma<60^\circ$ entspricht ellipsoidförmigen Kernen mit drei verschieden großen Halbachsen, die den β - und γ -Werten nach (II.2.2) zugeordnet sind (vgl. Abb. 1).

IV.2 Grundzustand

Wie die Abbildungen 2a-1 zeigen, liegt der Grundzustand bei allen untersuchten Aktiniden bei rotationssymmetrischer Deformation, und zwar bei länglicher Kerngestalt (Prolate). Zu diesem Ergebnis für den Grundzustand kommen auch Pashkevich³⁹⁾ und Larsson et al.¹⁰⁸⁾.

Die Deformation im Grundzustand nimmt mit wachsender Massenzahl von $\beta \approx 0.35$ (Th²²⁸) bis $\beta \approx 0.27$ (Fm²⁵⁴) ab. In der Arbeit von Pashkevich³⁹⁾ wächst die Deformation des Grundzustandes mit wachsender Massenzahl von $\beta \approx 0.2$ (Th²³²) bis $\beta \approx 0.3$ (Cr²⁵⁰). Nach Rechnungen von Nilsson et al.¹⁸⁾ mit Rotationssymmetrischem Hamiltonoperator bleibt die Grundzustandsdeformation im betrachteten Massenbereich fast konstant $\epsilon \approx 0.20-0.23$ (U²³⁴-Fm²⁵⁴). In den Potentialflächen für Pu²⁴², Cm²⁴⁶, Fm²⁵² und Ku/Rf²⁵⁸ nach¹⁰⁸⁾ liegen die ersten Minima bei $\epsilon \approx 0.21$, lassen aber wegen des kleinen Intervalls von Massenzahlen

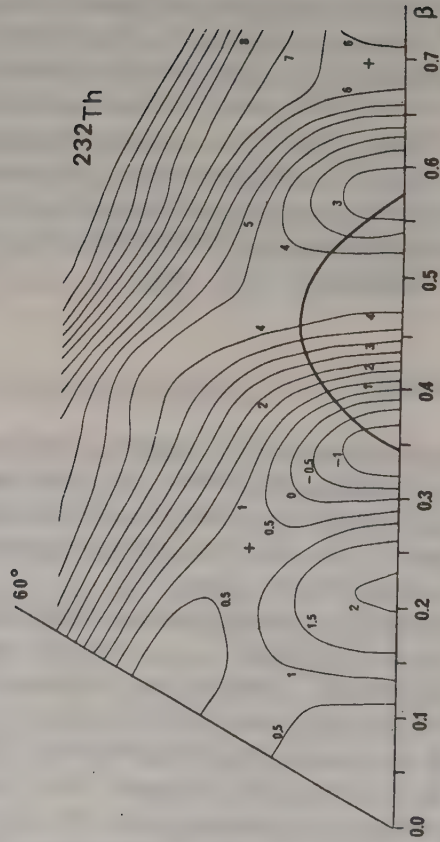


Abb. 2a. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für ^{232}Th . Skala 0.5 MeV.

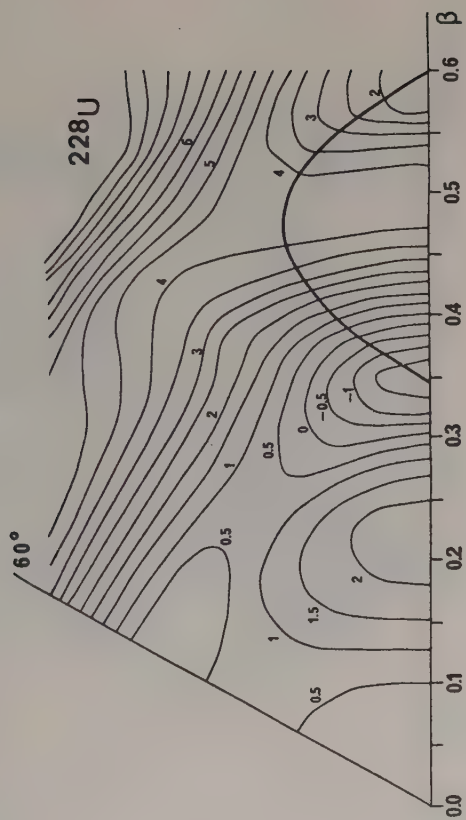


Abb.2b. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für ^{228}U . Skala 0.5 MeV.

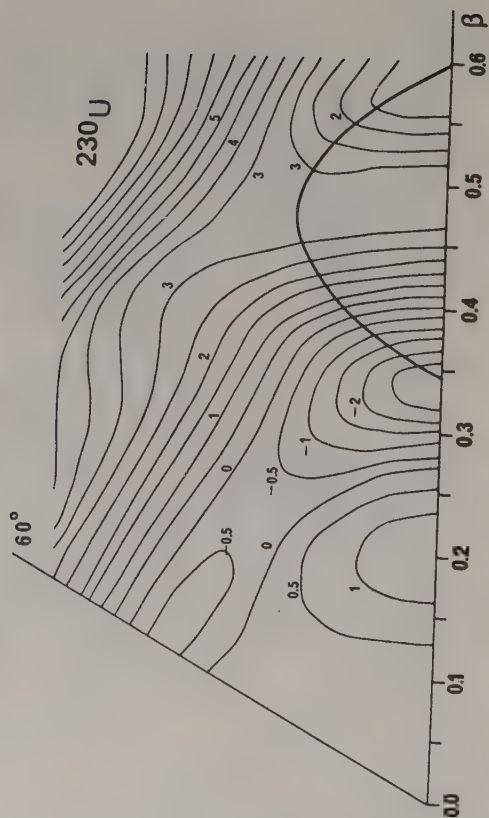


Abb. 2c. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für ^{230}U . Skala 0.5 MeV.

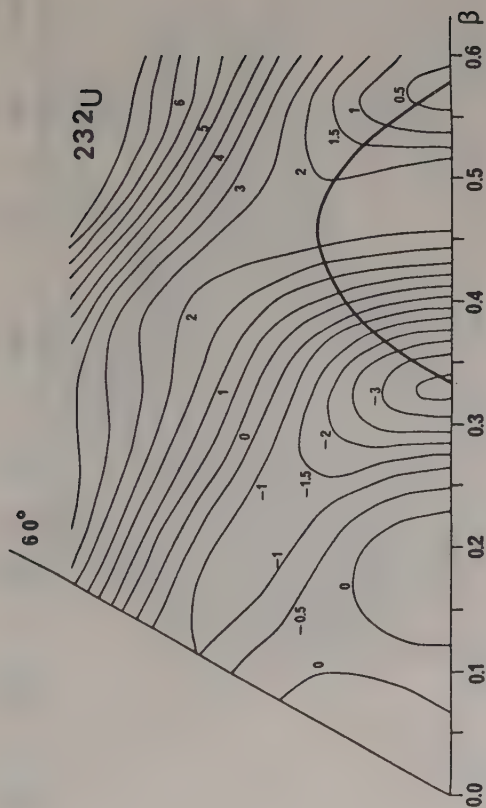


Abb. 2d. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für ^{232}U . Skala 0.5 MeV.

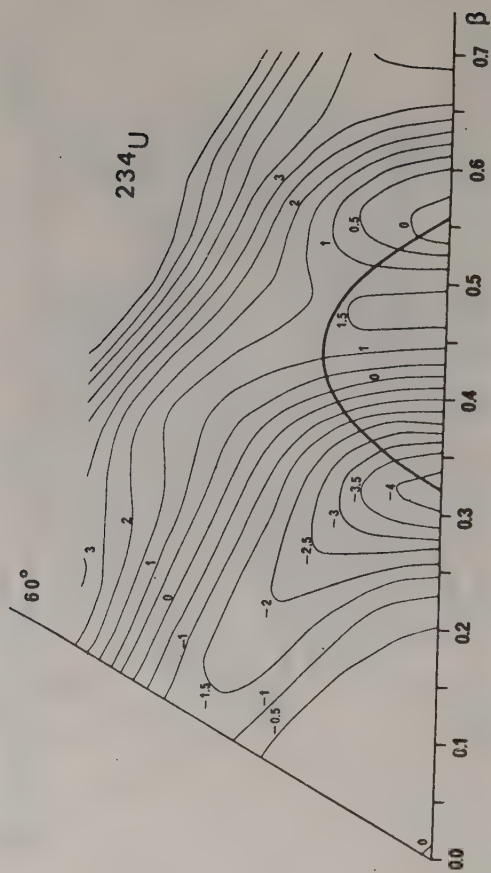


Abb. 2e. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für ^{234}U . Skala 0.5 MeV.

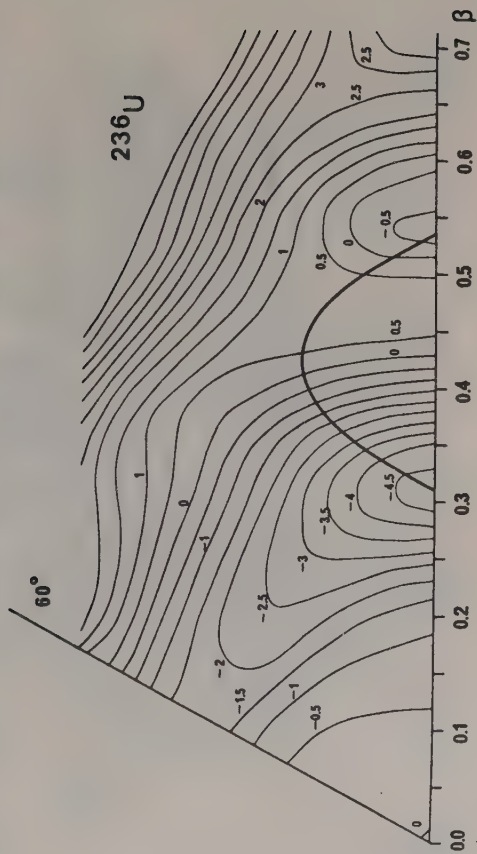


Abb. 2f. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für ^{236}U . Skala 0.5 MeV.

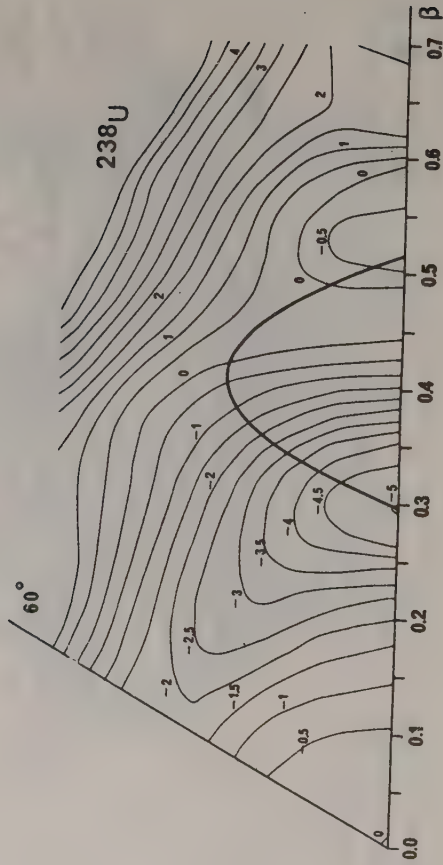


Abb.2g. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für ^{238}U . Skala 0.5 Mev.

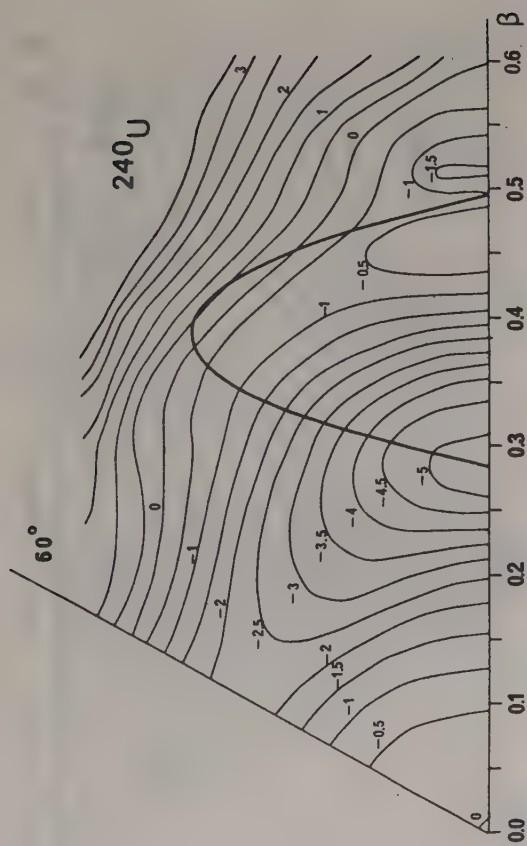


Abb.2h. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für ^{240}U . Skala 0.5 MeV.

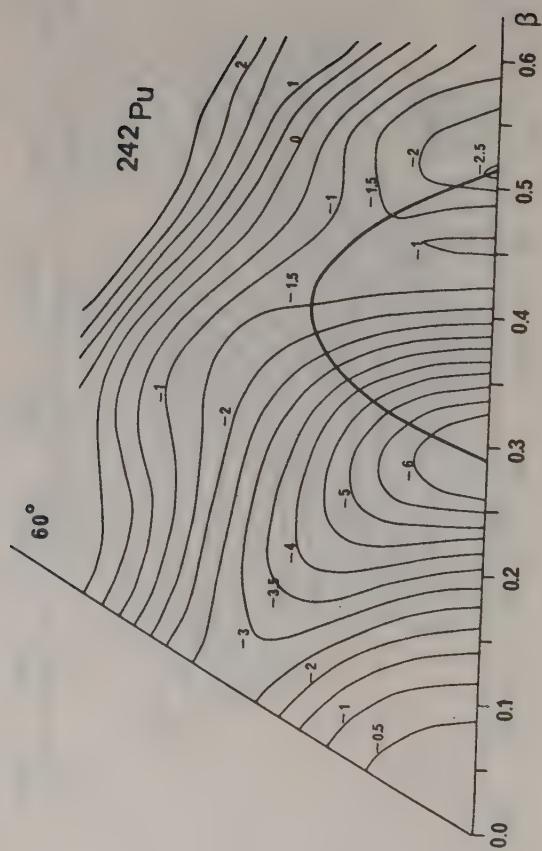


Abb.2i. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für ^{242}Pu . Skala 0.5 MeV.

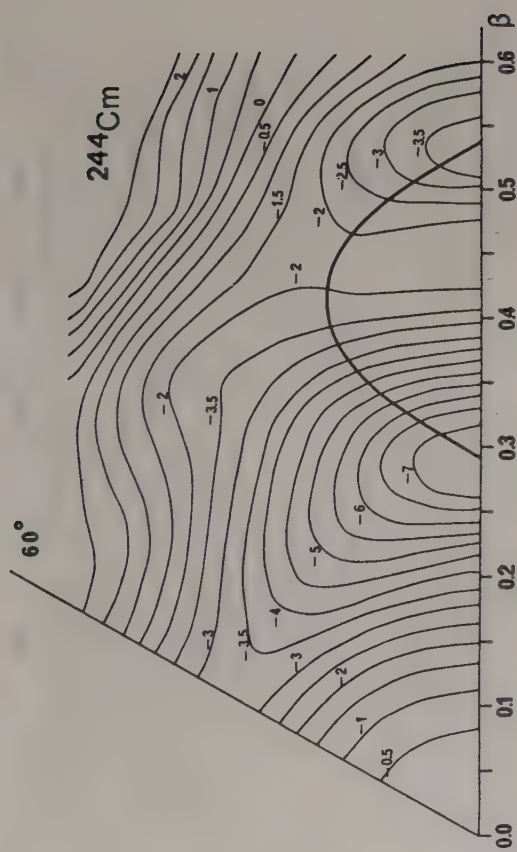


Abb.2j. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für ^{244}Cm . Skala 0.5 MeV.

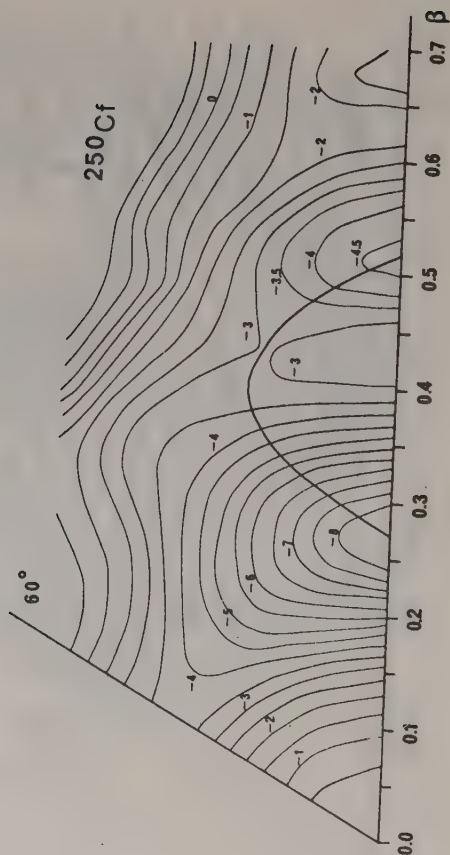


Abb. 2k. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für ^{250}Cf . Skala 0.5 MeV.

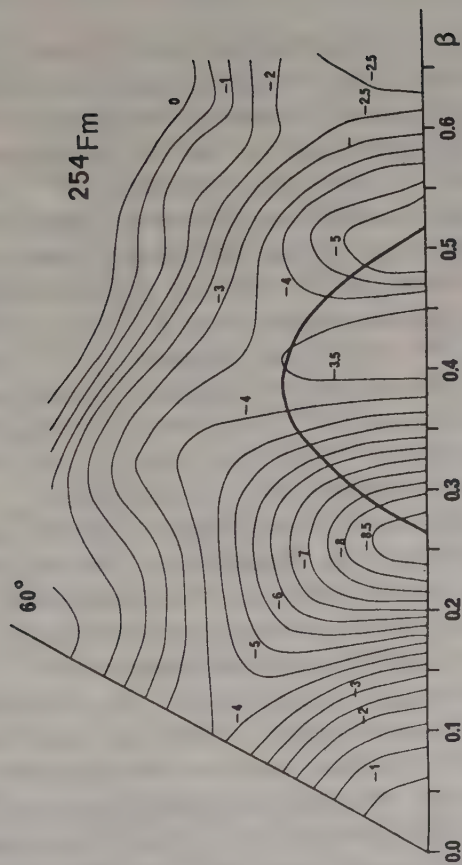


Abb.21. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für ^{254}Fm . Skala 0.5 MeV.

keinen Schluß auf die Massenabhängigkeit zu. Die entsprechenden Werte für Deformationen und Energien sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Für $\gamma=60^\circ$ (oblatenförmige Kerne) hat man bei allen Aktiniden ein deutliches Minimum, wenn nicht-axiale Deformationen ignoriert werden. Dieses Oblatenminimum ist durch ein Tal mit dem ersten Minimum auf der Prolatenachse ($\gamma=0^\circ$) verbunden. Für die leichteren Aktiniden Th^{228} , U^{228} und U^{230} (Abb. 2a-c) sind Oblaten- und Prolatenminimum durch einen Sattelpunkt getrennt. Dieser Sattelpunkt liegt allerdings nur um maximal 0.4 MeV (Th^{228}) über dem Oblatenminimum, sodaß sich wegen der Nullpunktsbewegung (etwa 0,5 bis 1 MeV nach Kumar¹³¹, Nilsson et al.¹⁹, Pauli und Ledergerber¹¹⁰) kein stabiler Zustand mit oblatenförmiger Kerngestalt ausbilden kann. Für die schweren Aktiniden ab U^{232} (Abb. 2d-l) ist das Minimum für oblatenförmige Kerne ($\gamma=60^\circ$) mit dem auf der Prolatenachse durch ein monoton abfallendes Tal verbunden.

Die Energie des Grundzustandes liegt für alle Aktiniden um einige MeV unter der des Minimums auf der Oblatenachse. Diese Differenz zwischen Oblaten- und Prolatenminimum nimmt mit der Massenzahl A zu, für den schwersten untersuchten Kern (Fm^{260}) beträgt sie 4.5 MeV, für den leichtesten (Th^{228}) 1.6 MeV.

Außerdem zeigen einige der Abb. 2a-l ein lokales Minimum für die kugelförmige Gestalt. Dieses ist ebenfalls so flach, daß dort stabile Zustände wegen der Nullpunktsenergie nicht existieren können. Entgegen den Ergebnissen von Pashkevich ist für alle hier betrachteten Kerne diese Verbindung zwischen Oblaten- und Prolatenminimum über ein Gebiet nicht-axialer Deformationen sehr deutlich ausgeprägt. Auch die neueren Rechnungen von Larsson et al.¹⁰⁸, die allerdings nur für die schweren Aktiniden Pu^{242} , Cm^{246} , Fm^{252} und Ku/Rf^{258} graphisch dargestellt sind, zeigen dieses stark ausgeprägte Tal zwischen Oblaten- und Prolatenminimum.

Z	N	A		β	$\beta^{39)}$	$\epsilon^{18)}$	$E(\beta)-E(0)$ (MeV)
90	138	228	Th	0.35	0.15	-	-1.4
90	142	232	Th	0.33	0.22	-	-2.8
92	136	228	U	0.35	-	-	-2.0
92	138	230	U	0.35	-	-	-2.8
92	140	232	U	0.33	-	-	-3.6
92	142	234	U	0.33	0.23	0.20	-4.2
92	144	236	U	0.31	0.25	0.20	-4.6
92	146	238	U	0.30	0.26	0.21	-5.0
92	148	240	U	0.29	-	-	-5.2
94	146	240	Pu	0.32	0.28	0.22	-6.3
94	148	242	Pu	0.30	0.28	0.23	-6.3
96	148	244	Cm	0.30	0.30	0.23	-7.5
98	152	250	Cf	0.27	0.30	0.23	-8.3
100	154	254	Fm	0.27	0.27	0.24	-8.8
100	156	256	Fm	0.26	0.26	0.24	-8.4
100	158	260	Fm	0.25	0.26	-	-7.0

Tab.1. Deformation im Grundzustand (Spalte 5) und nach Pashkevich³⁹⁾ (Spalte 6) und Nilsson et al.¹⁸⁾ (Spalte 7) und Energie im Grundzustand (Spalte 8). Dabei ist die Energie für den sphärischen Kern ($\beta=0$) auf Null normiert.

Beide Minima, das für oblatenförmige und das für prolatenförmige Gestalt, sind sehr weich bezüglich nicht-axialer Deformationen. Das Grundzustandsminimum verbreitert sich nicht-axial mit zunehmender Massenzahl A bei wachsendem γ immer mehr.

Weil das Tal im Potentialgebirge, das von Oblate zu Prolate führt, im allgemeinen um einige MeV tiefer verläuft als der Weg über den sphärischen Kern, ist es für kollektive Bewegungen des Kerns interessant, und ähnliche Rechnungen wie in dieser Arbeit sollten auch für Massenzahlen im Bereich der seltenen Erden durchgeführt werden. Solche Rechnungen wären deshalb wichtig, weil im Bereich $50 < Z$, $N < 82$ für besonders neutronenarme und bei Kernen mit $28 < Z < 50$ und $50 < N < 82$ für besonders neutronenreiche Kerne außerhalb der Stabilitätslinie zahlreiche experimentelle Daten über Deformationen vorliegen (132-135).

Theoretische Arbeiten über Kerndeformationen bei diesen Massenzahlen werden oft nur für rotationssymmetrische Ellipsoidgestalt durchgeführt (z.B. Marshalek et al.¹³⁶). Bei Berücksichtigung des γ -Freiheitsgrades für diese leichteren Kerne erweisen sich die Grundzustandsdeformationen als rotationssymmetrisch, aber die Steifheiten gegen γ -Deformationen als gering (Kumar und Baranger¹³⁷), Arseniev et al.¹³⁸⁻¹⁴⁰), Das Gupta und Preston¹⁴²). Oft existieren lokale Minima für Prolate und Oblate, wobei auch oblatenförmige Grundzustände vorkommen. Der Übergang zwischen positiven und negativen β (bzw. $\gamma=0^\circ$ und $\gamma=60^\circ$) hat kein ausgeprägtes Maximum in γ -Richtung, deshalb wird von den meisten Autoren ein Gestaltübergang im Grundzustand für möglich gehalten. Diese Arbeiten basieren auf Einteilchenpotentialen, deren Parameter nur für Kerne nahe der Stabilitätslinie zuverlässig bekannt sind, außerhalb des Tales der stabilen Kerne für sehr neutronenreiche bzw. neutronenarme Kerne aber vielleicht nicht mehr gültig

sind. Deshalb wäre ein Vergleich mit Ergebnissen interessant, die mit einer semi-empirischen Schalenkorrektur mit angepaßten Parametern wie in III.2 berechnet sind, die vom Einteilchenpotential unabhängig ist. Dies gilt umso mehr, als extreme Effekte gerade für die Kerne erreicht werden, die am weitesten von der Stabilitätslinie entfernt sind¹³⁸⁻¹⁴⁰).

IV.3 Sekundärminimum

Alle in dieser Arbeit untersuchten Aktiniden besitzen ein deutliches zweites Minimum. Wie die Grundzustandsdeformation ist auch die dem Spaltisomer zugeordnete Deformation rotationssymmetrisch. Ihr β -Wert nimmt mit der Massenzahl ab. Für den leichtesten Kern Th^{282} liegt das zweite Minimum bei $\beta \approx 0.57$ beim schwersten Kern Fm^{260} bei $\beta \approx 0.48$. Diese Kerndeformationen im zweiten Minimum sind etwas kleiner als die von Larsson et al.¹⁰⁸⁾ berechneten, $\epsilon \approx 0.6$ (Pu^{242}) bis $\epsilon \approx 0.65$ (Fm^{252}). Dies stimmt auch mit den früheren Ergebnissen von Nilsson et al.¹⁸⁾ für mehr Freiheitsgrade im rotationssymmetrischen Fall überein. In¹⁸⁾ wurde eine größere Anzahl von Kernen untersucht; dabei erhielten sie für die Deformation des Kerns im zweiten Minimum ϵ -Werte von 0.59 (U^{234}) bis 0.73 (Fm^{256}).

Die entsprechenden Deformationen der vorliegenden Arbeit sind wahrscheinlich etwas gering, da der Tröpfchenmodellanteil am zweiten Minimum für realistischere Kerngestalten flacher wäre. Dann würde sich das zweite Minimum der Schalenkorrektur erst bei größeren Deformationen in der Gesamtenergie auswirken. Abb. 3 zeigt einen Vergleich der Tröpfchenmodell-Energien für Rotationsellipsoide und für realistischere Deformation nach Ref.¹⁸⁾.

Pashkevich³⁹⁾ erhält das zweite Minimum bei zu großen Deformationen ($\beta \approx 0.7$ für Th^{228} bis $\beta \approx 1.0$ für Cf^{250}).

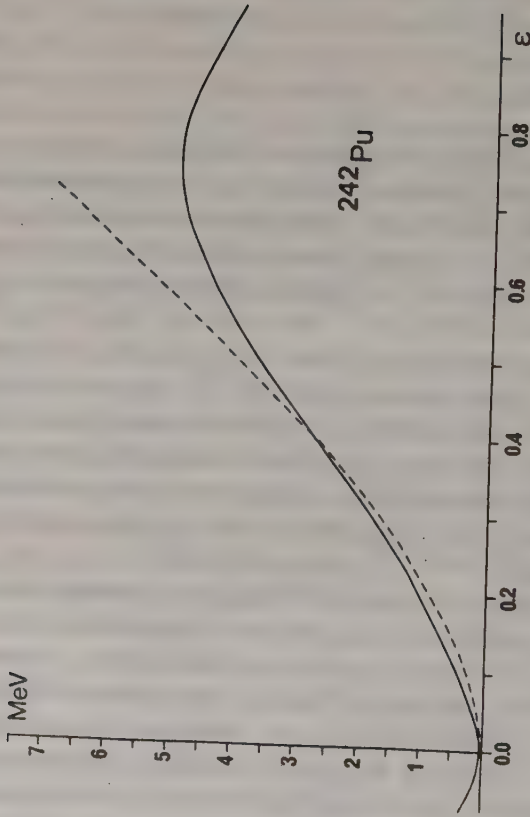


Abb. 3. Energie nach dem Tröpfchenmodell für verschiedene Kerndeformationen; Rotationsellipsoide (gestrichelt) und zweiparametrische Deformation ϵ, ϵ_4 (ausgezogen).

Deformationen und Energien im zweiten Minimum sind in Tab. 2 angegeben. Verglichen mit Ergebnissen rotationssymmetrischer Rechnungen von Nilsson et al.¹⁸⁾, Mosel und Schmitt¹⁰⁶⁾, Bolsterli et al.²³⁾ und Pauli und Ledergerber¹¹⁰⁾ ist die Energie im Sekundärminimum zu hoch, weil in der vorliegenden Rechnung die Tröpfchenmodell-Energie mit wachsender Deformation zu groß wird. Dies könnte durch Rechnungen mit einer realistischeren Kerngestalt, die auch das Einschnüren des Kerns zulässt, vermieden werden, doch ist in diesem Fall die Coulomb-Energie bei nicht-axialer Deformation ein schwieriges Problem, das bis jetzt noch nicht gelöst ist.

Eine wichtige Eigenschaft der Potentialfläche ist ihre Steifheit gegen γ -Deformationen an den stationären Punkten. Die Steifheit scheint im Sekundärminimum geringer zu sein als die im Grundzustand. Das steht im Gegensatz zu den Ergebnissen von Pashkevich³⁹⁾. Er erhält eine größere Steifheit für den Grundzustand als für das zweite Minimum und weicht damit nicht von der Tendenz des reinen Tröpfchen-Modells ab, wie sie Zielińska-Pfabé¹⁴¹⁾ berechnet hat.

IV.4 Erster und zweiter Sattelpunkt

Die Höhen der Spaltbarrieren vieler Aktiniden sind schon früh gemessen worden¹⁴³⁻¹⁴⁵⁾. Sieht man vom Tunneleffekt ab, kann man die Höhe einer einfachen Spaltbarriere der Energie gleichsetzen, bei der z.B. der (n,f)-Wirkungsquerschnitt stark zunimmt. Viele Barrierenhöhen von Kernen mit einer doppelten Spaltbarriere, wie Uran oder Plutonium, sind nach dieser Methode unter der (falschen) Annahme einer einfachen Barriere bestimmt worden, bevor man etwas über das zweite Minimum der Deformationsenergie und über die genauere Struktur der Spaltbarriere wußte. Trotzdem bleiben diese Daten zumindest

Z	N	A		B	$B^{39)}$	$E^{18)}$	$E(B)$ (MeV)
90	138	228	Th	0.57	0.70	-	4.1
90	142	232	Th	0.54	0.72	-	3.9
92	136	228	U	0.59	-	-	3.3
92	138	230	U	0.59	-	-	3.9
92	140	232	U	0.58	-	-	4.0
92	142	234	U	0.56	0.72	0.59	4.2
92	144	236	U	0.54	0.80	0.61	3.8
92	146	238	U	0.53	0.80	0.60	4.2
92	148	240	U	0.52	-	-	3.7
94	146	240	Pu	0.55	0.85	0.61	4.0
94	148	242	Pu	0.52	0.85	0.61	3.7
96	148	244	Cm	0.54	0.85	0.62	3.9
98	152	250	Cf	0.51	≈ 1	0.70	3.6
100	154	254	Fm	0.51	-	0.73	3.4
100	156	256	Fm	0.51	-	0.73	3.2
100	158	260	Fm	0.48	-	-	2.6

Tab.2. Deformation im Sekundärminimum (Spalte 5) und nach Pashkevich³⁹⁾ (Spalte 6) und Nilsson et al.¹⁸⁾ (Spalte 7) und Anregungsenergie $E(B)$ des niedrigsten Zustands im Sekundärminimum bei konstanter Nullpunktsenergie.

für die höhere der beiden Barrieren gültig. In den letzten Jahren sind auch Messungen für die doppelten Spaltbarrieren einiger Aktiniden durchgeführt worden^{93, 146-148}).

Rechnungen nach der Strutinsky-Methode ergeben Barrierenhöhen, die im Vergleich zu diesen experimentellen Daten in der Regel zu hoch liegen^{18, 23, 106, 110}). Es ist oft versucht worden, diese Diskrepanz durch immer mehr rotationssymmetrische Freiheitsgrade zu beseitigen. Dabei haben vor allem Möller et al.¹²⁻¹⁶) zeigen können, daß höhere Terme in der Parametrisierung (II.1.2) als etwa P_6 kaum noch zu einer Änderung der Energie führen. Deshalb können die Differenzen zwischen theoretischen und experimentellen Spaltbarrieren nicht beseitigt werden, wenn man bei der Annahme rotationssymmetrischer Kerndeformationen während der Spaltung bleibt.

Nach den Ergebnissen dieser Arbeit sind die ersten Sattelpunkte zwischen Grundzustand und zweitem Minimum für alle sechzehn untersuchten Aktiniden instabil gegen nicht-axiale Deformationen. Der tatsächliche Sattelpunkt liegt bei einer γ -Deformation zwischen 6° (Th²²⁸) und 21° (Fm²⁶⁰) (vgl. Tab. 3). Die nicht-axiale Barriere ist um 0.1 bis 0.6 MeV niedriger als die scheinbare Barriere bei rotationssymmetrischer Deformation (vgl. Tab. 4).

Abbildung 4 zeigt den Energiegewinn für die in dieser Arbeit berechneten Aktiniden bei Einschluß des nicht-axialen Freiheitsgrades. Die Energiedifferenzen zwischen experimentellen und theoretischen Werten werden nach Abb. 4 durch den γ -Freiheitsgrad vergrößert, da die Werte für rotationssymmetrische Deformationen im Vergleich zu mehrparametrischen Rechnungen^{18, 23, 106, 110}) zu niedrig liegen. Benutzt man die Energie der γ -Deformationen als Korrektur zu realistischeren rotationssymmetrischen Werten (z.B. von Nilsson et al.¹⁸), so führt das zu einer Verbesserung.

Die γ -Deformationen am Sattelpunkt sind im allgemeinen größer als nach³⁹⁾ und¹⁰⁸⁾. Die Sattelpunkte weichen bei Pashkevich³⁹⁾ für die leichteren Aktiniden bis U²³⁶ überhaupt

Z	N	A		$B(\gamma=0)$	B	γ^0	$B^{39)}$	$\epsilon^{18)}$ ($\gamma=0$)
90	138	228	Th	0.50	0.50	6	0.6	-
90	142	232	Th	0.49	0.48	12	0.6	-
92	136	228	U	0.51	0.50	9	-	-
92	138	230	U	0.49	0.50	15	-	-
92	140	232	U	0.49	0.49	12	-	-
92	142	234	U	0.48	0.49	12	0.58	0.45
92	144	236	U	0.48	0.49	14	0.6	0.45
92	146	238	U	0.46	0.47	12	0.58	0.43
92	148	240	U	0.46	0.48	11	-	-
94	146	240	Pu	0.47	0.48	12	0.6	0.43
94	148	242	Pu	0.46	0.47	12	0.5	0.44
96	148	244	Cm	0.45	0.46	15	0.6	0.42
98	152	250	Cf	0.43	0.44	15	0.6	0.41
100	154	254	Fm	0.43	0.44	16	0.5	0.43
100	156	256	Fm	0.43	0.44	20	0.5	0.41
100	158	260	Fm	0.41	0.41	21	0.5	-

Tab.3. Deformation am ersten Sattelpunkt, rotationssymmetrisch ($\gamma=0$, Spalte 5), nicht-axial B (Spalte 6) und γ (Spalte 7), nach Pashkevich³⁹⁾ (Spalte 8) und für rotationssymmetrische Deformation ϵ nach Nilsson et al.¹⁸⁾ (Spalte 9).

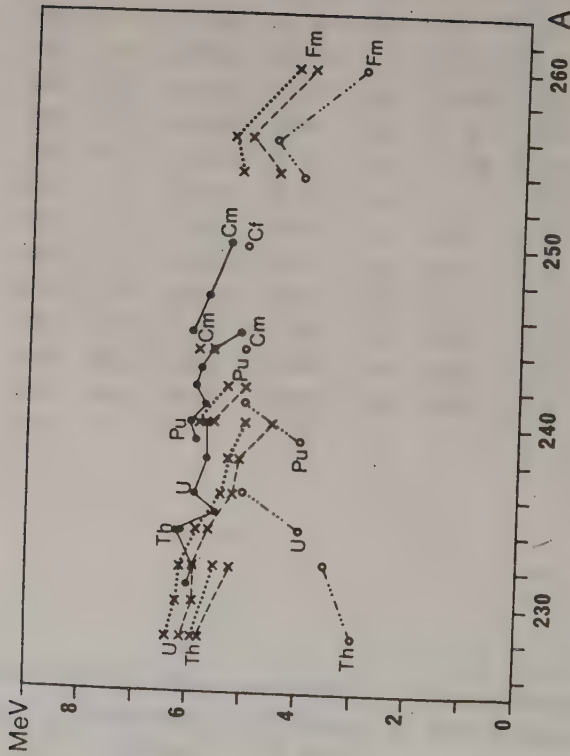


Abb. 4. Erste Barriere der Deformationsenergie für rotationsymmetrische (....) und für nicht-axiale Deformation (----). Zum Vergleich Werte nach Pashkevich³⁹⁾ (-----) und experimentelle Barrieren nach Bjørnholm und Lynn¹⁴⁶⁾ (ausgezogen).

nicht von der Rotationssymmetrie ab, für die schweren bis zu etwa 10° (s. Abb. 4). Larsson et al.¹⁰⁸⁾ haben ebenfalls für die leichteren Kerne Thorium und Uran keine Abweichung von der Rotationssymmetrie, bei den schweren Kernen erniedrigt sich der Sattelpunkt bei $\gamma \approx 10 - 15^\circ$ um einige hundert keV für die Kerne zwischen Plutonium und Fermium, doch reicht diese Erniedrigung nicht aus, um die experimentellen Barrieren richtig wiederzugeben.

Allen bisher bekannten Ergebnissen^{37,39,108)} zufolge ist die erste Barriere bei rotationssymmetrischer Deformation im Bereich der Aktiniden um etwa 10% relativ zum Grundzustand und um etwa 20% relativ zum zweiten Minimum überschätzt. Der Fehler nimmt mit wachsendem A zu.

Auch der zweite Sattelpunkt liegt bei allen untersuchten Aktiniden bei nicht-rotationssymmetrischer Kerngestalt. Allerdings ist dieser Energiegewinn gering und die absolute Höhe nicht zuverlässig, da Ellipsoide für so starke Deformationen keine gute Parametrisierung der Kerngestalt sind.

IV.5 Deformation minimaler Energie

Wie in IV.2-4 für die einzelnen invarianten Punkte der Potentialfläche gezeigt wurde, ist die Kerngestalt in den beiden Minima rotationssymmetrisch, aber an den beiden Sattelpunkten nicht-axial deformiert. In Abb. 5 ist der Querschnitt von Fm^{254} an den stationären Punkten der Energiefläche in der Parametrisierung (II.2.2) dargestellt. In diesem Beispiel beträgt die Abweichung $|x_o - y_o|$ von der Rotationssymmetrie maximal 16% des Kernradius R_c (am ersten Sattelpunkt).

Für alle Kerne verläuft der Weg vom ersten zum zweiten Minimum längs des Gradienten der Energiefläche vollkommen im nicht-axialen Gebiet. Im Gegensatz zu den Gestalten an den

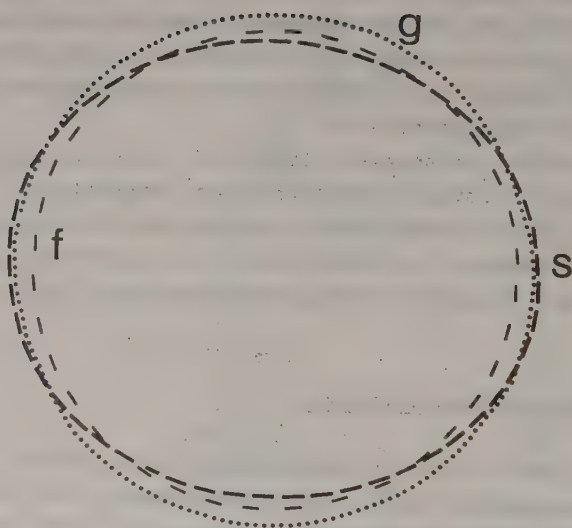


Abb. 5. Querschnitt des Kerns ^{254}Fm an den invarianten Punkten der Energiefläche, Grundzustand (g), erstem Sattelpunkt (s) und Sekundärminimum (f).

stationären Punkten, Grundzustand, Sekundärminimum, erster und zweiter Sattelpunkt, die Invarianten bezüglich Parametertransformationen sind, hängt der Weg zwischen diesen Punkten von der Wahl der Deformationsparameter ab. Bei einer Koordinatentransformation geht der Gradientenweg eventuell nicht in der der neuen Parameter über, doch kann man dies bei vernünftiger Wahl der Parameter vernachlässigen¹⁴⁹⁾.

In der Parametrisierung (II.2.2) in β und γ läßt sich der Weg zwischen Grundzustand, erstem Sattelpunkt und Sekundärminimum etwa durch eine Parabel in den cartesischen Koordinaten p und q mit

$$\begin{aligned} p &= \beta \cos \gamma \\ q &= \beta \sin \gamma \end{aligned} \quad (IV.5.1)$$

beschreiben. Die Relation der Parabel lautet, wenn g, f, s die Koordinaten am Grundzustand, ersten Sattelpunkt und Sekundärminimum indizieren:

$$q = q_s \frac{p_g p_f - p(p_g + p_f) + p^2}{p_g p_f - p_s(p_g + p_f) + p_s^2} \quad (IV.5.2)$$

(vgl. Ref.³⁷⁾).

Für die Koordinaten des Grundzustandes und des Sekundärminimums gelten folgende empirische lineare Näherungen in N und Z :

$$p_g = \beta_g = (0.002 Z - 0.006 N + 0.98) 1.03 \quad (IV.5.3)$$

$$q_g = 0, \quad \gamma_g = 0^\circ$$

und

$$p_f = \beta_f = (0.01 Z - 0.01 N + 1.04) 1.03 \quad (IV.5.4)$$

$$q_f = 0, \quad \gamma_f = 0^\circ$$

Die Sattelpunktskoordinate β_s wird ebenfalls linear in N und Z angenommen

$$\beta_s = -0.005Z - 0.00143N + 1.15 \quad (\text{IV.5.5})$$

während γ_s linear in Z, aber quadratisch in N angepaßt wird.

$$\gamma_s = (-1730 + 75.5Z - 26N - 0.5NZ + 0.25N^2)/3 \quad (\text{IV.5.6})$$

p_s und q_s lassen sich daraus nach (IV.5.1) bestimmen. In Abb. 2a-1 sind die so genäherten Wege zwischen Grundzustand und zweitem Minimum eingetragen.

Die Fortsetzung dieses Weges zum Zerreißpunkt müßte für eine nicht-axiale Parametrisierung mit Einschnürung berechnet werden. Die hier mit dreiachsigen Ellipsoiden berechneten Energieflächen zeigen einen nicht-axialen Verlauf dieses Weges zwischen Sekundärminimum und zweitem Sattelpunkt. Nach Abschnitt V endet dieser Weg zumindest bei bestimmten Massenasymmetrien bei nicht-axialer Fragmentdeformation. Deshalb und wegen seiner mangelnden Invarianz erscheint eine vollständige Berechnung des Weges zwischen dem (invarianten) Sattel- und Zerreißpunkt unnötig.

V Nicht-axiale primäre Fragmente von U^{236}

Nach früheren Rechnungen¹⁵⁰⁻¹⁵⁷⁾ für Eigenschaften der Fragmente am Spalt punkt, parametrisiert durch koaxiale Rotationsellipsoide, wird in der potentiellen Energie des Systems die Deformationsenergie der Fragmente weitgehend durch deren Coulomb-Abstoßung kompensiert. Deshalb hat die Gesamtenergie, als Funktion der Deformationsparameter des schweren und leichten Fragments aufgetragen, ein äußerst flaches Minimum (vgl. z.B. Dickmann und Dietrich¹⁵⁴⁾, Fig. 3). Eine kleine Unsicherheit in der potentiellen Energie von einigen hundert keV kann bereits eine vollständige Änderung der Deformation der Fragmente und ihrer Anregungsenergie bewirken. Man muß die potentielle Energie des Systems, die z.B. bei U^{236} in der Größenordnung von 1700 MeV liegt, auf ungefähr 0.1 MeV genau kennen. Da ein zusätzlicher γ -Freiheitsgrad - wie in IV für Aktiniden gezeigt wurde - die potentielle Energie um bis zu 0.7 MeV erniedrigt, sind nicht-axiale Deformationen gerade für die Fragmente am Spalt punkt von besonderer Bedeutung.

Bis jetzt bestehen zwischen theoretisch berechneten Anregungsenergien und den über Neutronen- und γ -Emission^{153,158-160)} gemessenen erhebliche Diskrepanzen. Dies ist zu einem gewissen Teil dadurch bedingt, daß man die inneren Anregungen des Kerns vor dem Zerreißen und die Coulomb-Anregung der Fragmente (nach Nix^{151,152)} und Rubchenya¹⁵⁵⁾ ungefähr 10 bis 15 MeV pro Fragmentpaar) nicht genau kennt. Diese Unsicherheiten hängen jedoch nur wenig von der Fragmentmasse ab. Deshalb können die bei bestimmten Fragmentpaaren auftretenden Abweichungen nicht darauf zurückgeführt werden. Da es sich dabei um Schaleneffekte handelt, können diese Diskrepanzen möglicherweise durch γ -Deformationen verringert werden.

Da Rechnungen dieser Art wegen der großen Zahl von Freiheitsgraden am Spalt punkt einen sehr großen numerischen Aufwand mit sich bringen, wurde zunächst nur versucht, ein

Fragmentpaar zu finden, für das eine nicht-axiale Deformation die potentielle Energie erniedrigt, um zu zeigen, daß die übliche Annahme rotationssymmetrischer Fragmente falsch ist und um einen Startpunkt für benachbarte Fragmentmassen zu bestimmen.

V.1 Masse und Ladung der Fragmente

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie eine nicht-axialsymmetrische Gestalt der einzelnen Fragmente die Eigenschaften des Fragmentpaares am Spalt punkt beeinflusst. Dieses System hat eine so große Anzahl von kollektiven Freiheitsgraden, daß nicht alle berücksichtigt werden können. Bei fest vorgegebenem Compoundkern läßt sich das Massenverhältnis der Tochterkerne beliebig variieren. Auch die Verteilung der Ladung auf die Teilkerne, d.h. deren Protonen-Neutronen-Verhältnis, kann unterschiedlich sein. Weiter lassen sich beide Fragmente voneinander unabhängig deformieren, und ihre Orientierung zueinander kann beliebig sein. Sucht man das Minimum der Energie des Systems, so ist es wegen der benötigten Rechenzeit unerläßlich, sich auf wenige wesentliche Freiheitsgrade zu beschränken.

In diesem Abschnitt soll deshalb nur ein Compoundkern, nämlich U^{236} , untersucht werden. Dieser Kern wurde ausgewählt, weil Messungen¹⁶¹⁻¹⁶⁸⁾ und theoretische Berechnungen^{150,153-157)} der Eigenschaften am Spalt punkt gerade für dieses System besonders zahlreich sind. Als weitere Einschränkung sollen nur Fragmentpaare mit gerader Massenzahl betrachtet werden. Für diese hat Schmitt¹⁵³⁾ mit koaxialen Rotationsellipsoiden die energetisch günstigsten (ganzen) Ladungszahlen Z_F berechnet. Diese Fragmentladungszahl Z_F ist in allen Fällen gerade, sodaß die energetisch begünstigten Ladungsverteilungen der beiden

Teilkerngerade zu gg-Kernen führen. Diese Fragmentpaare sind in Tabelle 5 angegeben. Diese geraden Protonenzahlen der Fragmente stimmen mit der experimentell wahrscheinlichsten (nicht-ganzen) Protonenzahl bis auf Bruchteile eines Protons überein - die mittlere Abweichung beträgt 0.5-0.8 Ladungseinheiten¹⁵³⁾. Die Abweichung der Ladungsdichte der Tochterkerne von der des Compoundkerns ist in vielen Arbeiten untersucht worden^{150,161-174)}.

Da hier nur die Energiedifferenz zwischen axialer und nicht-axialer Deformation untersucht wird, ist die angenommene Ladungsverteilung nicht entscheidend. Sie beeinflusst zwar die potentielle Energie in beiden Fällen, doch kann sie für den Differenzeffekt vernachlässigt werden. Um die Rechenzeit zu verringern, werden deshalb die von Schmitt¹⁵³⁾ für Rotationssymmetrie bestimmten günstigsten ganzen Fragmentladungszahlen vorgegeben und das Energieniveau bei fester Ladung bestimmt.

V.2 Gestalt der Fragmente

Bisher wurde die Gestalt der Fragmente am Spalt punkt in allen Arbeiten¹⁵⁰⁻¹⁵⁷⁾ in starker Vereinfachung als die zweier sich berührender Rotationsellipsoide angenommen, deren Symmetrieachsen kollinear sind. Diese Annahme erleichtert die numerischen Rechnungen erheblich, da man in der potentiellen Energie der einzelnen Fragmente den Oberflächenanteil und die elektrostatische Selbstenergie analytisch darstellen kann. Darüberhinaus werden üblicherweise zwei weitere Annahmen gemacht. Erstens: Die experimentell gemessene mittlere kinetische Energie der einzelnen Fragmente habe die Größe der Coulomb-Wechselwirkungsenergie zwischen den Fragmenten. Theoretische Werte sind deshalb zu hoch, denn ein Teil der Coulomb-

Z_L	A_L	Z_H	A_H
32	80	60	156
32	82	60	154
34	84	58	152
34	86	58	150
36	88	56	148
36	90	56	146
36	92	56	144
38	94	54	142
38	96	54	140
38	98	54	138
40	100	52	136
40	102	52	134
42	104	50	132
42	106	50	130
42	108	50	128
44	110	48	126
44	112	48	124
44	114	48	122
46	116	46	120
46	118	46	118

Tab.5. Energetisch günstigste gg-Fragmente für $^{235}\text{U}(n_{th},f)$ nach Schmitt¹⁵³⁾.

Energie am Spaltspunkt bewirkt die Coulomb-Anregung der Fragmente.

Weiter wird häufig angenommen, die mittlere Anregungsenergie, die experimentell aus Neutronen- und γ -Emission der Fragmente bestimmt wird^{158,171,175}), sei gleich der Deformationsenergie der Fragmente am Spaltspunkt. Man vernachlässigt dabei weitere Anregungen des Systems - wie z.B. die Aufheizung des Kerns vor dem Zerreißen.

Daß in keiner der früheren Arbeiten¹⁵⁰⁻¹⁵⁷) von der Annahme der Rotationssymmetrie und der ellipsoidförmigen Gestalt abgegangen wurde, hat außer den erwähnten noch andere numerische Gründe, auf die im Anhang A.II eingegangen wird. Außerdem hat das System zwei weitere Freiheitsgrade, gegenüber dem rotationssymmetrischen Fall, z.B. die beiden Winkel γ_H, γ_L für das Abweichen von der Rotationssymmetrie. Die gesamte potentielle Energie des Systems hat dann trotz dieser Vereinfachungen noch acht Freiheitsgrade. Sie setzt sich zusammen aus der deformationsabhängigen potentiellen Energie der beiden Fragmente $E_H(Z_H, N_H; \beta_H, \gamma_H)$ und $E_L(Z_L, N_L; \beta_L, \gamma_L)$ und der Coulomb-Wechselwirkungsenergie $E_C(Z_H, N_H, Z_L, N_L; \beta_H, \gamma_H, \beta_L, \gamma_L)$ zwischen den beiden:

$$E(Z_H, N_H, Z_L, N_L; \beta_H, \gamma_H, \beta_L, \gamma_L) = E_H(Z_H, N_H; \beta_H, \gamma_H) \quad (V.2.1)$$

$$+ E_L(Z_L, N_L; \beta_L, \gamma_L) + E_C(Z_H, N_H, Z_L, N_L; \beta_H, \gamma_H, \beta_L, \gamma_L)$$

H indiziert dabei die Größen des schweren Fragments, L die des leichten.

Da die Deformation der Fragmente am Spaltspunkt durch das Minimum der potentiellen Energie des Systems - Energie der einzelnen Fragmente plus Wechselwirkungsenergie zwischen ihnen - bestimmt wird, ist bei festem Compoundkern, fester Fragment-

masse und fester Fragmentladung das Minimum der vierparametrischen Energie $E(\beta_H, \beta_L, \gamma_H, \gamma_L)$ zu suchen. Das erfordert wegen der mehrfachen Integrationen und wegen der benötigten Anzahl von Gitterpunkten sehr viel mehr Rechenzeit als für die zweiparametrische Energiefläche $E(\beta_H, \beta_L)$ im rotationssymmetrischen Fall.

V.3 Schalenkorrektur am Spaltspunkt

Durch eine Reihe von Messungen an Spaltfragmenten weiß man, daß Schaleneffekte auch am Spaltspunkt eine große Rolle spielen. Als wichtigster ist die Massenasymmetrie der Spaltprodukte von Kernen mit hoher Massenzahl in der Niederenergiespaltung zu nennen. Für Compoundkerne mit $Z \geq 90$, d.h. schwerer als Actinium, beträgt die wahrscheinlichste Massenzahl A_H des schweren Fragments annähernd $140^{2)}$ - unabhängig vom Compoundkern. Erst bei etwa Californium ist die Massenverteilung wieder symmetrisch.

Einen zweiten Hinweis auf die Schalenstruktur der Fragmente gibt die gemessene mittlere kinetische Energie, die für niedrige Anregung als Funktion der Fragmentmasse A_F ein Maximum bei $A_F \approx 132$ ($Z \approx 50$, $N \approx 82$) hat¹⁷⁶⁻¹⁷⁸⁾. Dies deutet auf eine besondere Stabilität von Fragmenten mit der magischen Protonenzahl $Z=50$ und Neutronenzahl $N=82$ hin.

Auch die Anzahl der bei der niederenergetischen Kernspaltung pro Fragment freiwerdenden prompten Neutronen macht einen Schaleneffekt deutlich. Die Anzahl der Neutronen, gegenüber der Fragmentmasse aufgetragen, hat den Verlauf einer Sägezahnkurve¹⁷⁹⁾ mit deutlichen Maxima für $Z_F=50$ und $N_F=50$ und ein schwächeres für $N_F=82$. Dies wurde für verschiedene Compoundkerne von Experimenten^{158,179-182)} bestätigt. Theoretisch wird dies durch die geringe Deformation fast magischer Kerne

erklärt^{156,158,179,183-185}): Den geringen Deformationen entspricht niedrige Anregungsenergie des Fragments und deshalb geringe Neutronenemission.

In einigen Arbeiten wurden Schalenkorrekturen für die Deformation der Fragmente am Spalt punkt als zusätzliche Korrektur zur Tröpfchenmodell-Formel benutzt: Nach einem Vorschlag von Fong¹⁸⁶) haben Vandenbosch¹⁵⁶), Armbruster¹⁵⁷) und Schmitt¹⁵³) Schaleneffekte in der Oberflächenspannung berücksichtigt. Schade¹⁵⁰) addiert eine krümmungsabhängige Energie zur Massenformel von Myers und Swiatecki⁶⁹⁻⁷²); diese berücksichtigt zwar Schaleneffekte für geringe Deformationen, verschwindet aber mit zunehmender Kerndeformation völlig. Dickmann und Dietrich¹⁵⁴) und Rubchenya¹⁵⁵) berechnen die Schalenkorrektur durch Anwendung der Strutinsky-Methode. In der vorliegenden Arbeit wird die Schalenkorrektur nach (III.2.4) bestimmt.

V.4 Anregungsenergie und Deformationsenergie

Um zu untersuchen, ob es energetisch begünstigte Fragmentpaare gibt, die beide nicht-axial sind oder von denen wenigstens eines von der rotationssymmetrischen Gestalt abweicht, muß man, wie in V.3 beschrieben, das Minimum der potentiellen Energie des Gesamtsystems bezüglich der Deformationsparameter $\beta_H, \gamma_H, \beta_L, \gamma_L$ suchen. Diese Rechnung muß für alle Fragmentpaare (A_H, A_L) durchgeführt werden. Aus den Deformationen des Fragmentpaares, die zu der niedrigsten Energie des Gesamtsystems gehören, kann man die Anregungsenergie der Fragmente und ihre kinetische Energie berechnen und diese mit experimentellen Werten vergleichen.

Die theoretisch berechnete Anregungsenergie, die nach den einfachen Annahmen in V.2 gleich der Deformationsenergie des

Fragmentes ist, wird dabei auf die stabile Grundzustandsdeformation des Fragments und nicht, wie es in vielen Arbeiten geschieht, auf die eines sphärischen Kerns gleicher Masse bezogen. Die Grundzustandsenergie für Fragmentmassen von $A_L \approx 100$ und $A_H \approx 150$ liegt um 3-4 MeV unter der bei kugelförmiger Gestalt, stimmt aber für die fast doppelt magischen Fragmente mit $A_F \approx 80$ (magische Zahlen $Z_F=28$, $N_F=50$) und $A_F \approx 132$ ($Z_F=50$, $N_F=82$). Man erhält also einen unsystematischen Fehler, wenn man alle Grundzustände als sphärisch annimmt.

Um die Energiedifferenzen zum rotationssymmetrischen Fall zu berechnen, wird die β -Deformation des einzelnen Fragments für Rotationsellipsoide nicht aus dem Minimum der potentiellen Energie des Gesamtsystems, sondern aus den experimentell bekannten Anregungsenergien bestimmt. Die experimentellen Werte sind nach Schmitt¹⁵³⁾ in Abb. 6 als Funktion der Fragmentmasse aufgetragen. Die zugeordnete β -Deformation ist diejenige, für die die experimentelle Anregung gleich der auf den deformierten Grundzustand bezogenen Deformationsenergie des Fragments ist.

Da die durch γ -Deformation bedingte Erniedrigung der Energie klein ist, (0.2-0.7 MeV nach IV), werden nur die Fragmentpaare auf mögliches Abweichen von der Rotationssymmetrie untersucht, für die beide Energieflächen $E(\beta_H, \gamma_H)$ und $E(\beta_L, \gamma_L)$ für die aus den Anregungsenergien bestimmten β_H und β_L möglichst weich gegen γ -Deformation sind.

Die Schwankung der Schalenenergie bestimmt wesentlich die Weichheit der potentiellen Energie bezüglich γ . Die Tröpfchenmodell-Energie bevorzugt rotationssymmetrische Fragmente. Am Beispiel des Fragmentpaares $A_H=138$, $Z_H=54$ und $A_L=98$, $Z_L=38$ wird dies in Abb. 7 gezeigt. Die Tröpfchenmodell-Energie des Gesamtsystems (einschließlich Wechselwirkungsenergie), die Wechselwirkungsenergie und die Schalenenergie der beiden Fragmente sind in Abhängigkeit von γ_H aufgetragen. Das leichtere Fragment ist rotationssymmetrisch. Die aus der experimentellen Anregungsenergie bestimmten β -Werte sind $\beta_H=0.247$ und $\beta_L=0.679$

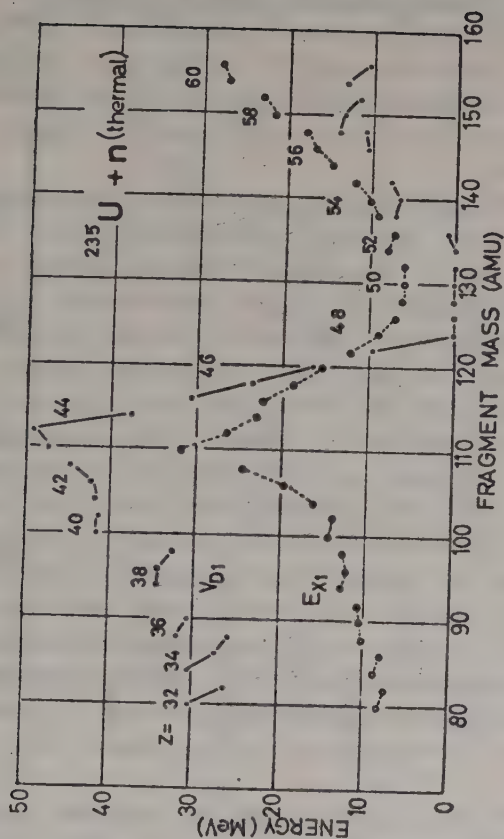


Abb. 6. Anregungsenergien (offene Kreise) aus Neutronen-¹⁵⁸ und Gamma-Emissions-Daten ¹⁶⁰ (entnommen Schnitt ¹⁵³).

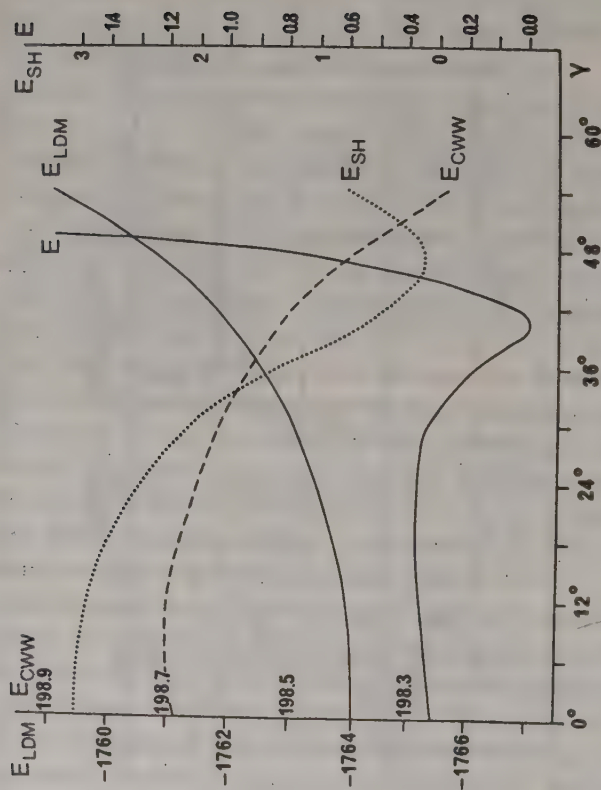


Abb. 7. Tröpfchenmodellenergie (E_{LDM}), Schalenenergie (E_{SH}), Coulombwechselwirkungsenergie (E_{CWW}) und Gesamtenergie (E) des Fragmentpaares ($A_H=138$, $Z_H=54$; $A_L=98$, $Z_L=38$) als Funktion von γ_H ($\gamma_L=0$) bei konstanter Kernlänge für $B_H(\gamma_H=0)=0.25$ und $B_L=0.70$. Alle Energien in MeV.

(für $\gamma_H = \gamma_L = 0^\circ$).

Das Abweichen von der Rotationssymmetrie wird hier nur bei fester Kernlänge z_0 untersucht ($\beta \neq \text{const}$), da im anderen Fall ($\beta = \text{const}$) der Kern mit zunehmendem γ kürzer würde. Bei konstant gehaltener Länge des Fragments fällt die Wechselwirkungsenergie monoton mit γ_H . Wie Abb. 7 zeigt, ist dieser Effekt nicht sehr groß (0.5 MeV von $\gamma_H = 0^\circ$ bis $\gamma_H = 54^\circ$), reicht also nicht aus, um ein nicht-rotationssymmetrisches Minimum zu erzeugen. Allein die Schalenenergie kann, wenn sie mit wachsendem γ stark abnimmt, nicht-axiale Deformationen des Systems begünstigen, da nach Abb. 7 die potentielle Energie des Systems nach dem Tröpfchenmodell eindeutig den rotationssymmetrischen Fall bevorzugt.

Ob die Schalenenergie des nicht-axialen Fragments stärker mit γ fällt, als die Tröpfchenenergie ansteigt, hängt im wesentlichen von der jeweiligen β -Deformation ab: Bei kleinen β -Werten begünstigt die Schalenenergie rotationssymmetrische Gestalt, bei größeren ($\beta \approx 0.4$) für einige Fragmentmassen und -ladungen nicht-axiale Deformation. Nicht-axiale Deformation tritt deshalb nicht bei allen Fragmenten auf. Nur wenn die Coulomb-Wechselwirkungsenergie (gegen die Deformationsenergie) s o l c h e Fragmentlängen begünstigt, bei denen die Schalenenergie stark instabil gegen γ -Deformation ist, kann das Minimum der potentiellen Energie zu nicht-axialen Deformationen hin verschoben werden. Korrekturen sind deshalb nur zu den Coulomb-Wechselwirkungs- (bzw. kinetischen) Energien und Deformations- (bzw. Anregungs-) Energien b e s t i m m t e r Fragmente zu erwarten. Deshalb sind γ -Deformationen der Fragmente interessant, denn die Diskrepanzen zwischen Theorie und Experiment treten ebenfalls nur bei bestimmten Fragmenten auf.

Im angeführten Beispiel ist für $\gamma_H = 40.5^\circ$, $\gamma_L = 0^\circ$ die Energie um 0.3 MeV niedriger als im rotationssymmetrischen

Fall. Dies entspricht einer Verlängerung der einen Halbachse um 13% und einer Verkürzung der anderen um 11% gegenüber der Rotationssymmetrie. Der Querschnitt der Prolate für $\gamma_H=0^\circ$ geht von einem kreisförmigen in einen elliptischen über mit dem Achsenverhältnis $6.6 \text{ fm} : 5.2 \text{ fm} \approx 1.3 : 1$.

In Abb. 8 ist die potentielle Energie (einschließlich Wechselwirkung) der hier untersuchten Fragmentpaare als Funktion von γ_H bzw. γ_L dargestellt. Man sieht deutlich die unterschiedliche Steifheit der Fragmente gegen γ -Deformation. Besonders weich sind die Fragmentpaare $A_H=156$, $A_L=80$ und $A_H=152$, $A_L=84$. Bei dem ersten tritt sogar ein schwaches Minimum für $\gamma_L=6^\circ$ auf.

Für das oben angegebene Fragmentpaar 138/98 mit $\gamma_H=40.5^\circ$ für das schwere Fragment wurde (bei festem γ_H) der γ -Wert des leichten Fragments variiert. Es hat sich jedoch kein Fragmentpaar gefunden, bei dem beide Fragmente nicht axialsymmetrisch sind. Dies ist jedoch nicht auszuschließen, wenn man systematisch die Energie (V.2.1) minimalisiert und alle Fragmentpaare erfaßt. Dies erfordert sehr viel Computer-Zeit, doch könnte man dann auch die Anregungsenergien aus den Minima der Energiefläche berechnen und möglicherweise einige Diskrepanzen zu den direkt meßbaren Größen der Kernspaltung (Ladung, Masse, kinetische und Anregungsenergien der Fragmente) beseitigen. Ziel des Abschnittes V war aber, zunächst nur zu untersuchen, ob ein solches Minimum bei nicht rotationssymmetrischen Fragmenten überhaupt zu finden ist.

V.5 Kinetische Energie der Fragmente

Eine zur Beschreibung der Fragmente am Spalt punkt charakteristische Größe ist deren kinetische Energie. Diese ist nach den vereinfachenden Annahmen in V.1 gleich der elektrostatischen Wechselwirkungsenergie zwischen den Fragmenten bei der vorgegebenen Spalt punktdeformation. Wegen der dabei vernach-

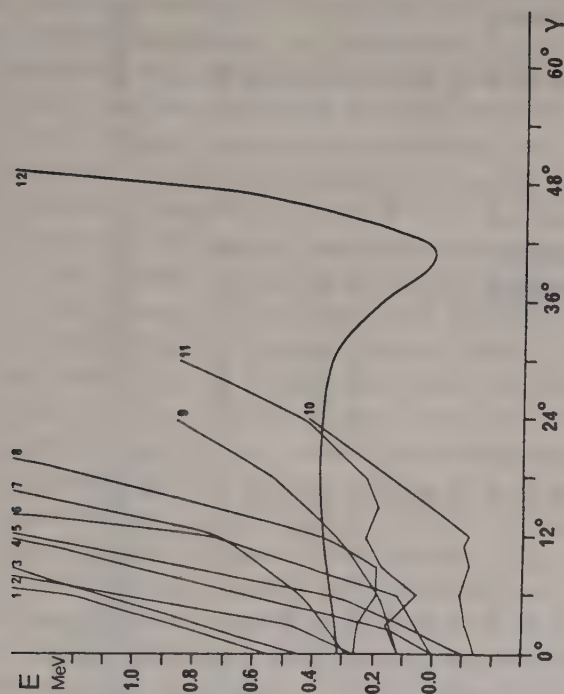


Abb. 8. Gesamtenergie (einschließlich Wechselwirkungsenergie) für Verschiedene Fragmentpaare von $^{235}\text{U}(n_{\text{th}}, f)$ als Funktion von γ_{H} bzw. γ_{L} bezogen auf das Minimum auf Kurve 12. Der γ -Wert des anderen Fragments ist jeweils konstant. Die folgende Tabelle enthält die den einzelnen Kurven zugeordnete Massen-, Ladungs-Zahl und Deformation.

Kurve	A_L	Z_L	B_L	γ_L	A_H	Z_H	B_H	γ_H
1	104	42	0.60		132	50	1.12	0(fest)
2	98	38	0.60		138	54	0.39	0(fest)
3	106	42	0.60		130	50	1.00	0(fest)
4	98	38	0.70		138	54	0.25	40,5(fest)
5	80	32	0.50		156	60	1.15	0(fest)
6	84	34	0.45		152	58	0.96	0(fest)
7	80	32	0.45		156	60	1.07	0(fest)
8	98	38	0.70	0(fest)	138	54	0.39	
9	112	44	0.98	0(fest)	124	48	0.302	
10	84	34	0.36		152	58	0.97	0(fest)
11	80	32	0.36		156	60	1.07	0(fest)
12	98	38	0.70	0(fest)	138	54	0.25	

Tabelle zu Abb.8. Massen-, Ladungs-Zahl und Deformation der Fragmente zu Kurve 1-12 der Abb.8.

lässigten Coulomb-Anregung wird die so berechnete kinetische Energie im allgemeinen größer sein als die experimentellen Werte. Die richtige kinetische Energie liegt nach Nix¹⁵²⁾ und Dickmann und Dietrich¹⁵⁴⁾ zwischen der der beiden ellipsoidförmigen Kerne und der zweier Punktladungen im Abstand der beiden großen Halbachsen. Deshalb sind in Abb. 9 neben der experimentellen kinetischen Energie von U^{236} nach Schmitt et al.¹⁷⁷⁾ die nach V.3 für rotationsellipsoidförmige Fragmente berechneten angegeben und die für zwei Punktladungen im Abstand der großen Halbachsen. Die kinetische Energie ist gegen die Fragmentmassenzahlen A_H und A_L aufgetragen. Die theoretischen Werte geben den Gesamtverlauf der kinetischen Energie recht gut wieder, liegen aber aus den erwähnten Gründen zu hoch. Besonders der Abfall der kinetischen Energie für die symmetrische Massenaufteilung ($A_H=A_L=118$) und das experimentelle Maximum bei $A_H \approx 132$ werden deutlich wiedergegeben. Allerdings ist nach Abb. 9 die theoretische Wechselwirkungsenergie maximal bei $A_H=134$ statt 132, und der Abfall zur symmetrischen und zur stark asymmetrischen Spaltung ist zu steil. Statt der gemessenen 24.2 MeV zwischen Maximum ($A_H=132$) und symmetrischer Spaltung ($A_H=118$) beträgt die berechnete Differenz 29.2 MeV zwischen $A_H=134$ und $A_H=118$. Zur größten Massenasymmetrie ($A_H=156/A_L=80$) hin ergibt sich eine Differenz von 50 MeV statt der experimentellen von 30 MeV.

Neben der vernachlässigten Coulomb-Anregung der Spaltfragmente ist bestimmt die Annahme ellipsoidförmiger Fragmente zu grob. Die Wechselwirkungsenergie am Spalt Punkt ist niedriger, wenn die Gestalt der Fragmente von einer Quadrupoldeformation abweicht. Die Fragmentdeformation hat nach Wilets²⁾ einen Oktupolanteil, wodurch zwischen den Fragmenten ein Hals entsteht. Diesen Effekt führt man in einigen Arbeiten¹⁵²⁻¹⁵⁴⁾ künstlich dadurch ein, daß man die beiden rotationssymmetrischen Ellipsoide mit einem Abstand d voneinander trennt. Im Ausdruck

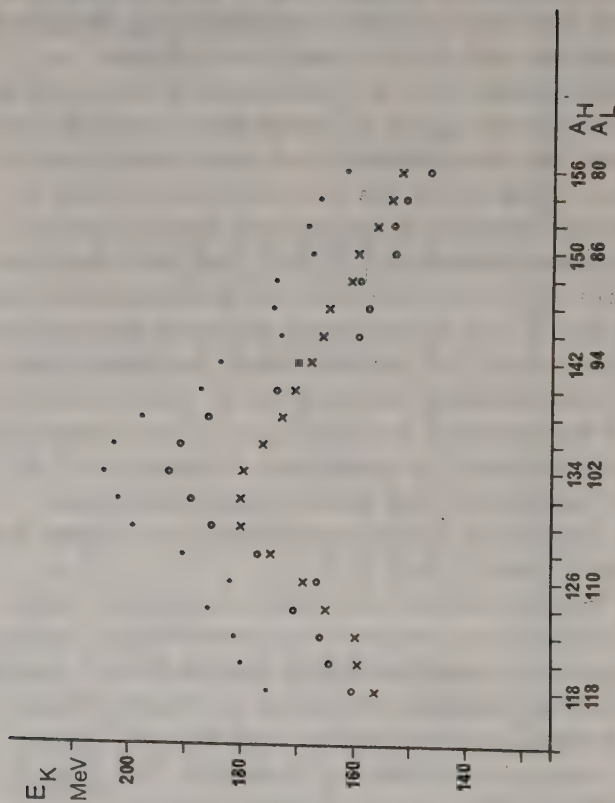


Abb. 9. Kinetische Energie der Fragmente von $^{235}\text{U}(n_{th}, f)$ als Funktion der Fragmentmassenzahlen für Rotationsellipsoide (Punkte) und für zwei Punktladungen im Abstand der großen Halbachsen (offene Kreise) und experimentell nach Schmitt et al. ¹⁷⁷ (x).

für die Wechselwirkungsenergie wird dann die Summe der beiden Halbachsen c_1+c_2 (s. A.II.2) durch c_1+c_2+d ersetzt. Diesen Einfluß zeigt die Abb. 10. Dort sind die experimentellen Werte, die für zwei Punktladungen im Abstand c_1+c_2+d für $d=0$ und für $d=0.9$ fm mit den Ellipsoid-Halbachsen c_1 und c_2 aufgetragen. Da die Deformationen für die verschiedenen Fragmentpaare unterschiedlich sind, werden die kinetischen Energien durch diesen Hals-Effekt verschieden stark gesenkt.

Für den Verlauf der kinetischen Energie spielen Schalen-effekte eine entscheidende Rolle. Die Schalenenergie bestimmt im wesentlichen die der experimentellen Anregungsenergie entsprechenden Deformationen. Da die Anregungsenergie gleich der Deformationsenergie über dem Grundzustand ist, würde eine andere Schalenenergie zu völlig anderen Deformationen der Fragmente und damit zu einer anderen Wechselwirkungsenergie zwischen diesen führen. Deshalb ist die kinetische Energie ein empfindlicher Test für die Schalenkorrektur.

Die Deformationen der Fragmente, ihre Anregungs- und kinetischen Energien sind in Tabelle 6 zusammengestellt.

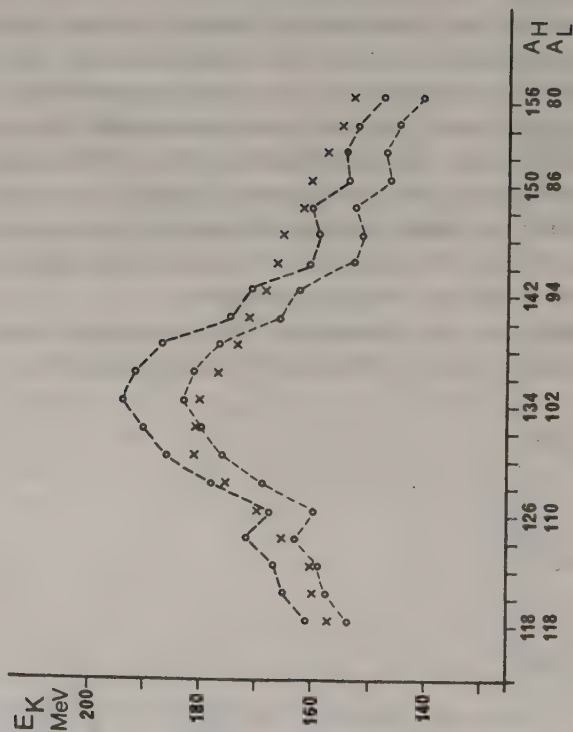


Abb.10. Wie Abb.9, aber für zwei Punktladungen im Abstand c_1+c_2+d für $d=0$ fm (obere Kurve) und für $d=0.9$ fm (untere Kurve).

A_H	Z_H	β_H	E_{xH}	A_L	Z_L	β_L	E_{xL}	$E(\beta_H, \beta_L)$	E_{WW}
156	60	1.07	28.0	80	32	0.36	8.3	-1765.28	162.7
154	60	1.06	27.0	82	32	0.23	7.5	-1765.16	167.1
152	58	0.97	23.0	84	34	0.45	8.8	-1768.40	169.2
150	58	0.95	21.5	86	34	0.50	8.1	-1770.78	168.2
148	56	0.86	18.0	88	36	0.53	10.0	-1766.45	174.9
146	56	0.86	16.8	90	36	0.58	10.5	-1768.71	173.0
144	56	0.71	14.8	92	36	0.72	10.8	-1771.25	174.7
142	54	0.54	11.9	94	38	0.73	13.0	-1765.65	184.5
140	54	0.48	10.0	96	38	0.71	12.3	-1768.68	187.9
138	54	0.25	9.0	98	38	0.70	12.7	-1761.08	198.7
136	52	0.18	7.2	100	40	0.72	14.2	-1760.10	203.2
134	52	0.16	7.9	102	40	0.70	13.9	-1762.08	205.0
132	50	0.10	6.0	104	42	0.82	16.2	-1765.24	202.2
130	50	0.14	6.0	106	42	0.85	19.7	-1766.48	198.8
128	50	0.18	6.0	108	42	0.96	24.5	-1768.31	191.6
126	48	0.22	6.9	110	44	1.12	32.1	-1767.67	182.4
124	48	0.30	9.0	112	44	0.98	26.3	-1768.29	186.1
122	48	0.56	12.0	114	44	0.86	22.9	-1772.68	181.6
120	46	0.62	15.6	116	46	0.85	22.0	-1771.22	180.1
118	46	0.78	18.8	118	46	0.78	18.8	-1776.34	175.8

Tab. 6. Anregungs- E_x , potentielle $E(\beta_H, \beta_L)$ und Wechselwirkungsenergie E_{WW} in Mev.

VI Überschwere Elemente

In den letzten Jahren wurde in vielen theoretischen Arbeiten^{19-24,27-30,187-192)} Entdeckungs- oder Herstellungsmöglichkeiten für überschwere Elemente erörtert. 1965 vermuteten Myers und Swiatecki⁶⁹⁾ als erste auf Grund ihrer Schalenkorrektur einen Bereich von stabilen Kernen mit Massenzahlen weit außerhalb der bis dahin bekannten. Myers und Swiatecki nahmen allerdings einen Schalenabschluß für die magische Protonenzahl 126 an, während man heute $Z=114$ für die richtige magische Protonenzahl hält^{174,194-198)}.

In der Natur findet man heute Elemente bis zur Kernladungszahl 94, künstlich erzeugen kann man heute Kerne bis zur Ladungszahl 105¹⁹³⁾. Dies ist begrenzt durch die Stabilität solcher Kerne gegenüber den möglichen Zerfallsarten: spontane Spaltung, α - und β -Zerfall. Die Instabilität schwerer Kerne gegen spontane Spaltung in der Natur oder auch bei der künstlichen Herstellung ist auf das starke Anwachsen der Coulomb-Energie gegenüber der Oberflächenenergie zurückzuführen. Erst ein relativ starker (negativer) Schaleneffekt, wie er beim Abschluß von Schalen auftritt, kann die Diskrepanz zwischen Coulomb- und Kernkräften (Oberflächenenergie) kompensieren. Swiatecki (s. Ref.¹⁹³⁾) vergleicht die bekannten Kerne in der $N-Z$ -Ebene mit einer Insel längs des Tales der β -Stabilität. In der Umgebung der magischen Zahlen $Z=114$ und $N=184$ liegt, davon getrennt, die kleine Insel der überschweren Kerne. In dem Bereich dazwischen sind alle Kerne wegen der geringen Schaleneffekte instabil. Sobiczewski et al.¹⁸⁹⁾ sagen auf Grund von Schalenmodell-Rechnungen für ein Woods-Saxon-Potential noch weitere abgeschlossene Schalen für den Massenbereich von 200 bis 260 voraus und vermuten stabile über-überschwere Kerne bei 154³⁸²⁾ und 164⁴⁷²⁾.

Die Voraussagen über die Höhe und Größe dieser Inseln der

Überschweren Kerne schwanken in der Literatur vor allem wegen der unsicheren Abschätzung der Spaltlebensdauern. Diese hängt über die Durchdringungswahrscheinlichkeit der Spaltbarriere äußerst empfindlich von deren Höhe und Gestalt ab. Da das Einführen des nicht-axialen Freiheitsgrades bei Aktiniden die Spaltbarriere erniedrigt (Kap.IV), kann man erwarten, daß dies auch für die Halbwertszeiten überschwerer Kerne gegenüber spontaner Spaltung von Bedeutung ist.

Der schwerere Bereich der Insel überschwerer Kerne ist nach Bolsterli et al.^{22,23)} relativ flach. Deshalb könnte die mögliche Erniedrigung der Spaltbarrieren und damit der Lebensdauern die Insel so weit verkleinern, daß eine künstliche Herstellung überschwerer Kerne unmöglich wird. Man muß nämlich, um unvermeidliche Massenverluste durch Neutronenemission und α -Zerfall zu kompensieren, zu hoch zielen, d.h. die (heiße) Fusion von zu schweren Kernen anstreben¹⁹³⁾. Bei einer sehr kleinen Insel überschwerer Kerne wird das schwierig, wenn nicht unmöglich. Es ist deshalb gerade für überschwere Kerne wichtig, die Höhe und Gestalt der Spaltbarrieren genau zu kennnnn.

VI.1 Magische Protonenzahl und Schalenkorrektur-Parameter

Unter allen überschweren Elementen wird im allgemeinen von denen in der Nähe des doppelt-magischen Kerns mit der Protonenzahl $Z=114$ und der Neutronenzahl $N=184$ erwartet, daß sie die besten Daten für α - und β -Stabilität und für spontanen Zerfall haben. Meist nimmt man daher an, daß unter allen möglichen überschweren Kernen einer in der Nähe von 114^{298} am leichtesten entdeckt oder erzeugt werden könnte.

Spontane Spaltung ist für überschwere Kerne d e r Zerfallsprozeß, dessen Wahrscheinlichkeit am unsichersten ist. Aus diesem Grund wird in VI.2 und VI.5 zunächst für 114^{298} unter-

sucht, welchen Einfluß ein Abweichen von der rotationssymmetrischen Gestalt auf die Spaltbarrieren und Lebensdauern hat.

Zur Berechnung der Fläche der potentiellen Energie wird wieder die Schalenkorrektur (III.2.4) benutzt, in der von der Schalenfunktion sphärischer Kerne $S(N,Z)$ nach Myers und Swiatecki^{71,72)} Gebrauch gemacht wird. Bei Rechnungen mit Massenzahlen im Bereich der überschweren Kerne verursachen die magischen Zahlen der Myers-Swiatecki-Massenformel Schwierigkeiten, weil diese Formel $Z=N=126$ statt $Z=114$ als magische Zahlen berücksichtigt. Daher ist im Modell von Myers und Swiatecki der Kern 114^{298} nicht doppelt magisch. Andererseits hängt die Anpassung dieser Massenformel an experimentelle Daten empfindlich von den magischen Zahlen ab, die in diese Formel eingehen.

In der vorliegenden Arbeit wurde die magische Protonenzahl $Z=126$ der ursprünglichen Arbeit von Myers und Swiatecki durch $Z=114$ ersetzt. Der Amplitudenparameter der Schalenfunktion $S(N,Z)$ muß wegen der veränderten Abstände in den magischen Zahlen neu angepaßt werden. In der vorliegenden Arbeit ist (wie in ³⁸⁾)

$$C = 3.2 \text{ MeV}$$

(VI.1.1)

statt $5.8 \text{ MeV}^{69-72)}$ angenommen worden. Dieser Bündelungsparameter C der Schalenfunktion gibt gerade als Grundzustandsmasse von 114^{298} den Wert der ursprünglichen Massenformel mit $C=5.8 \text{ MeV}$ richtig wieder. Man kann hoffen, daß dies in der Nähe von $(Z=114, N=184)$ einen guten Wert ergibt, da die Masse der ursprünglichen, gut angepaßten Massenformel^{71,72)} trotz der falschen magischen Zahl zuverlässig erscheint und vor allem durch die Schalenkorrektur des (doppelt magischen) Kerns bestimmt ist. Auf eine Neuanpassung der beiden Parameter der Schalenfunktion (oder sogar sämtlicher Parameter der Massenformel) wurde wegen der begrenzten Computerzeit verzichtet.

VI.2 Oblaten-Prolaten-Spaltung^{*)}

Abb. 11 zeigt die Fläche der potentiellen Energie. Als Kerngestalt ist das Ellipsoid (II.2.2) mit drei verschiedenen Achsenlängen angenommen, das durch die Parameter β und γ beschrieben wird. Nach Abb. 11 ist der Sattelpunkt auf der Prolatenachse ($\beta=0.27, \gamma=0^\circ$) nur scheinbar, er ist instabil gegen γ -Deformation. Der wirkliche Sattelpunkt liegt bei $\beta=0.32$ bei einer gegenüber dem Rotationsellipsoid verlängerten Gestalt. Die Abweichung von der Rotationssymmetrie beträgt $\gamma=23^\circ$. Dies entspricht einer Kerngestalt mit einem Achsenverhältnis von 1 : 1.22 : 0.86. Die Höhe der Barriere ist 10.1 MeV, d.h. um 0.5 MeV niedriger als die scheinbare Barriere auf der β -Achse ($\gamma=0^\circ$).

In einigen theoretischen Arbeiten^{30-33,199-201)} wurde in den letzten Jahren vermutet, daß die Spaltung überschwerer Kerne über eine oblatenförmige Gestalt verläuft und diese Konfiguration dann in einer Mehrfachspaltung (meistens in drei Fragmente) endet. Teilweise liegen diesen Ergebnissen Rechnungen nach dem Einteilchen-Modell zugrunde, wie in den Arbeiten von Mosel und Greiner^{200,201)} und in der von Mosel, Fink und Greiner³⁰⁾. Die potentielle Energie am Oblaten-Sattelpunkt liegt danach um 5 MeV niedriger als die am Prolaten-Sattelpunkt. Diese Ergebnisse sind aber nach Bassichis und Wilets⁴⁰⁾ zweifelhaft, da für die potentielle Energie einfach die Einteilchenenergien des deformierten Kerns aufsummiert wurden (s. Bolsterli et al.^{22,23)}). Dem deformierten Kern entspricht nämlich ein Hamiltonoperator mit einer Lagrange-Nebenbedingung (z.B. konstantes Multipolmoment) für ein externes Potential. Das führt in Hartree-Fock-Rechnungen zu einer Willkür, solange man nicht weitere Annahmen über die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung macht. Bei Rechnungen nach der Strutinsky-Methode wird

^{*)} Der Spaltmodus von VI.2 ist in Ref.³⁸⁾ veröffentlicht.

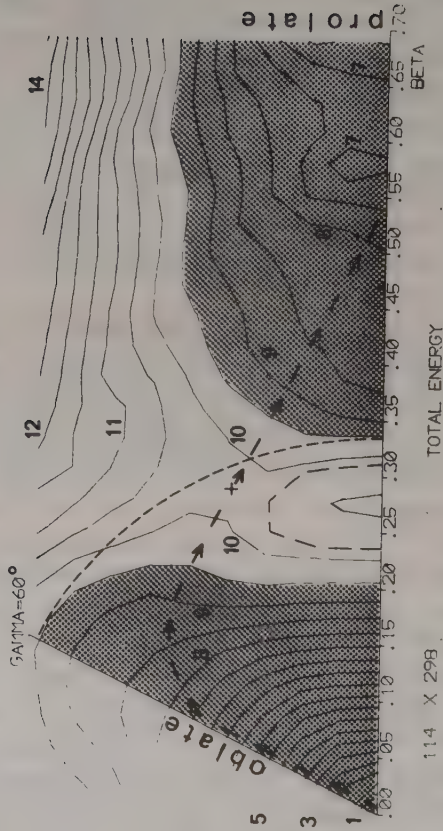


Abb.11. (=Fig.1 in Ref. 38) Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für 114X^{298} , Skala 0.5 MeV. Das Kreuz markiert den Sattelpunkt. Pfeile bezeichnen den Übergang von oblatenformiger Kerngestalt längs des Gradienten der Energiefäche. Die gepunktete Fläche entspricht Gebieten mit einer Energie 9.5 MeV, in denen Oblaten bzw. Prolaten bevorzugt sind. Diese Bereiche sind durch $\beta=0.33$ getrennt.

diese Willkür vermieden.

In den Arbeiten von Fraser, Grumann und Greiner^{32,199)} werden auch Oktupol-Vibrationen im Hinblick auf die Dreifachspaltung untersucht, doch auch in diesen Arbeiten sind die Barrieren, verglichen mit der Strutinsky-Methode sehr gering (5 MeV statt der 10 MeV für 114^{298}).

Nach Abb. 11 verläuft der mit der Schalenkorrektur (III. 2.4) berechnete Gradienten-Weg der Potentialfläche vom Grundzustand ($\beta=0$) längs der Oblatenachse bis zu einer Deformation von $\beta=0.15$ und erreicht die Prolatenachse bei $\beta=0.55$. Daher nimmt ein Kern auf dem Weg zur Spaltung längs dieses Gradienten-Linie folgende Gestalten an: zunächst ist er oblatenförmig deformiert bis zu einer Exzentrizität von $1 : 1 : 0.86$. Danach ist die Gestalt nicht-rotationssymmetrisch; der Sattelpunkt liegt im Bereich nicht-axialer Deformationen mit $\gamma=23^\circ$. Schließlich nimmt er die Gestalt einer Prolate an (mit dem Achsenverhältnis $1 : 1.63 : 1$) und bleibt dann rotationssymmetrisch.

Der Spaltprozess beginnt also mit oblatenförmiger Verformung, wie es auch von Grumann, Mosel, Fink und Greiner³⁰⁾ dargestellt wurde, endet aber - im Widerspruch zu diesen - in der bei Aktiniden üblichen Prolatenspaltung. Ergebnisse von Larsson, Ragnarsson und Nilsson¹⁰⁸⁾ scheinen dies zu bestätigen. Es gibt zwei bemerkenswerte Unterschiede zwischen diesem Oblaten-Prolaten-Übergang und der Spaltung nach Grumann et al.³⁰⁾. Erstens ist die Sattelpunktsgestalt nicht-axial und definiert einen bestimmten energetischen Engpaß im nicht-axialen Gebiet ($0^\circ \leq \gamma < 60^\circ$). Zweitens ist Oblatenspaltung und die damit verbundene Drei- oder Vierfachspaltung, wie sie in Ref. 30-33,199-201) diskutiert wurde, höchst unwahrscheinlich.

Der Kern durchläuft auf dem Weg zur Spaltung nicht-axiale Deformationen. Der Unterschied zu den bei den Aktiniden durchlaufenen Deformationen ist: Bei allen untersuchten überschweren

Kernen (vgl. auch VI.4) tritt ein Übergang von oblaten- zu prolatenförmiger Gestalt auf, während bei den Aktiniden schon der Grundzustand prolatenförmig deformiert ist und Oblaten während des gesamten Spaltprozesses energetisch ungünstig sind. Um dies zu verdeutlichen, zeigt Abb. 12 die Deformationsenergie als Funktion von γ für verschiedene aufeinanderfolgende β -Werte. Die Grenze zwischen stabiler Oblaten- bzw. Prolaten-Gestalt liegt bei $\beta=0.33$, die in Abb. 11 eingezeichnet ist. Dieser β -Wert entspricht annähernd der β -Koordinate des Sattelpunktes. Grob gesagt, ist der Kern abgeplattet zwischen Grundzustand und Sattelpunkt und dann länglich bis zur Spaltung. Das Minimalisieren der Deformationsenergie bei jeweils festem β definiert so eine Variante des Weges zur Spaltung, auf dem der Kern einen abrupten Übergang von Oblate zu Prolate längs der Kurve $\beta=0.33$ ausführt. Ein realistischer Weg liegt vermutlich zwischen den beiden extremen Wegen. Ihm entspricht ebenfalls der Übergang Oblate-Prolate am nicht-axialen Sattelpunkt.

Da ellipsoidische Kerngestalten für so kleine β -Werte realistisch sind. (s. Abb. 3), gelten diese Überlegungen auch für Kerngestalten mit mehr Freiheitsgraden. Dagegen kann das Sekundärminimum unter Umständen für solche Kerngestalten wegfallen, da eine realistische Tröpfchenenergie für diese Deformation schon abfallend und die zweite Barriere deshalb niedriger ist.

VI.3 Schalenenergie und γ -Deformation

Abb. 13 zeigt für $\beta < 0.4$, $0^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ$ die Schalenenergie von 114^{298} in dem Bereich, der für den Übergang von oblaten- zu prolatenförmigem Kern interessant ist. Man sieht, daß schon die Schalenenergie einen nicht-axialen Sattelpunkt erzeugt. Dies ist besonders wichtig, da die Tröpfchenmodell-Energie von

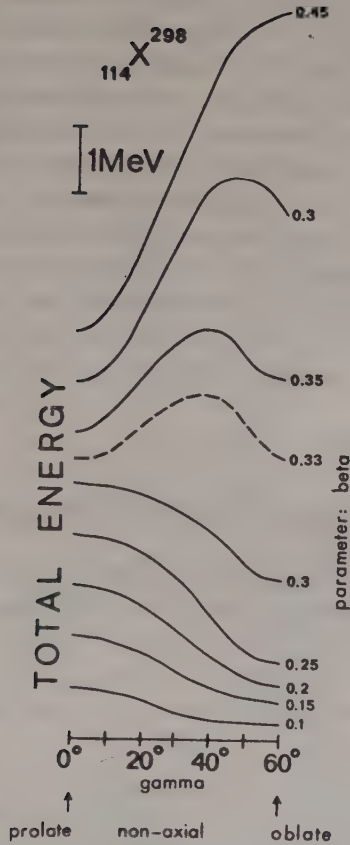


Abb.12. (=Fig.2 in Ref.³⁸) Deformationsenergie als Funktion von γ für $^{114}\text{X}^{298}$ für neun verschiedene β -Werte.

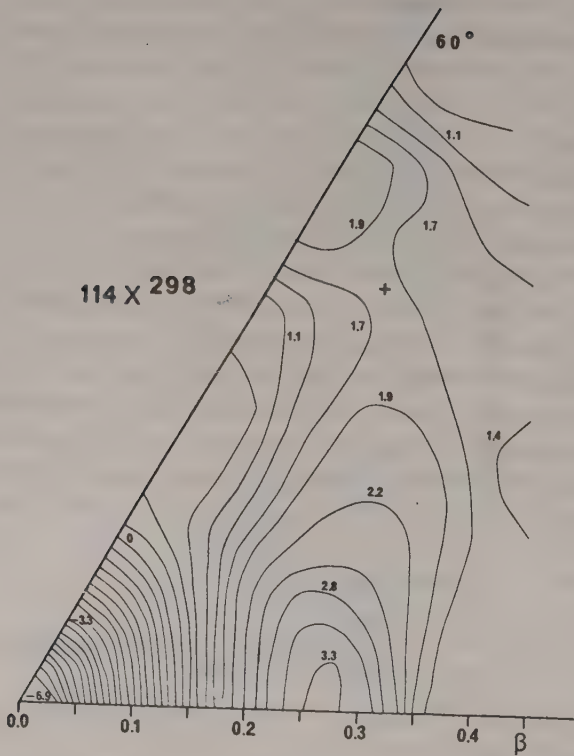


Abb.13. Schalenkorrektur $E_{SH}(\beta, \gamma)$ für $114X^{298}$. Die Energie-Skala ist 0.276 MeV.

Ellipsoiden Prolaten begünstigt und man eigentlich weitere Freiheitsgrade berücksichtigen müßte. Das Bild zeigt aber, daß der Sattelpunkt dieser Rechnungen nicht wesentlich durch diese Tröpfchenmodell-Effekte beeinflusst wird. Der nicht-axiale Sattelpunkt in der Schalenenergie ist gegenüber dem der gesamten Deformationsenergie weiter zur Oblatenachse hin verschoben. Die Tendenz der Ellipsoid-Tröpfchenmodell-Energie, den Sattelpunkt zur Prolatenachse hin zu verschieben, ist nur ein quantitativer Effekt. Da der Sattelpunkt auch ohne die vereinfachte Tröpfchenmodell-Energie bei nicht-axialen Deformationen liegt, ist ein Übergang von Oblaten- zu Prolatengestalten während der Spaltung auch bei realistischerer Kerngestalt zu erwarten. Bei einem Sattelpunkt auf der Oblatenachse, wie in Ref.^{30,33)}, wäre ein solcher Übergang kaum möglich, denn der Kern würde keine Energie gewinnen.

VI.4 Spaltbarrieren der β -stabilen gg-Kerne

Die Deformationsenergie wurde außer für 114^{298} noch für alle β -stabilen gg-Kerne¹⁸⁾ in der Umgebung dieses Kerns bestimmt (110^{290} , 110^{292} , 110^{294} , 112^{294} , 112^{296} , 114^{300} , 114^{302}). Die Abbildungen 14a bis 14g zeigen die entsprechenden Energieflächen für die Region der vermuteten Überschweren Kerne.

In Tab. 7 sind die (VI.1.1) entsprechenden Dämpfungsparameter dieser Kerne angegeben, die die Schalenfunktion für den kugelförmigen Kern so reduzieren, daß seine Masse mit der übereinstimmt, die man mit 5.8 MeV und der magischen Zahl $Z=126$ nach der Massenformel von Myers und Swiatecki (zweite Version^{71,72)}) erhält. Nach dieser Tabelle ist der Wert $C=3.2$ MeV etwas zu hoch. Ein gemeinsamer Faktor für alle Überschweren Kerne soll in dieser Arbeit nicht angepaßt werden, da dies

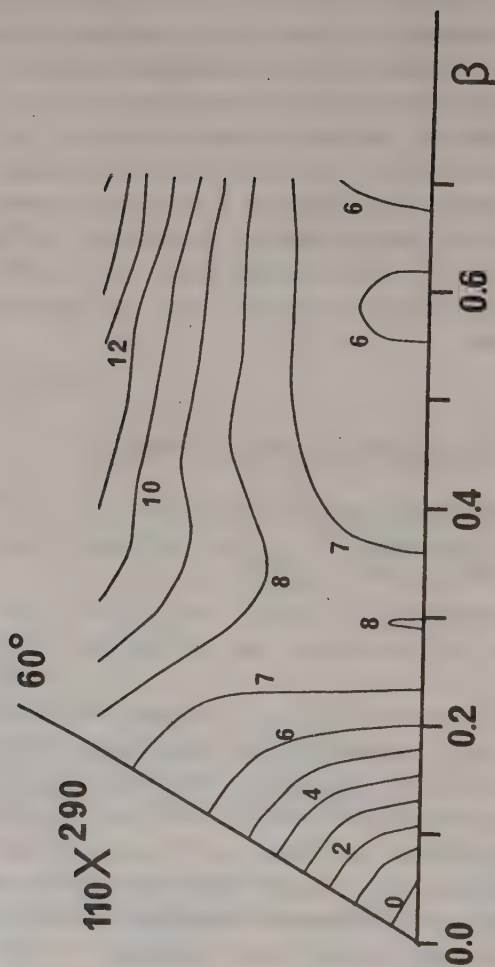


Abb.14a. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für $^{110}\text{X}^{290}$. Skala 1 MeV.

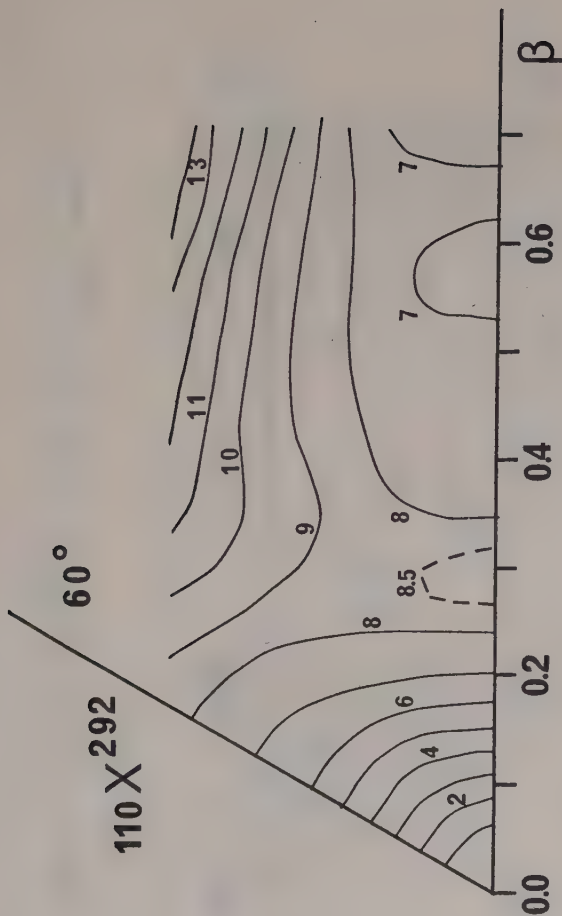


Abb. 14b. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für $^{110}\text{X}^{292}$. Skala 1 MeV.

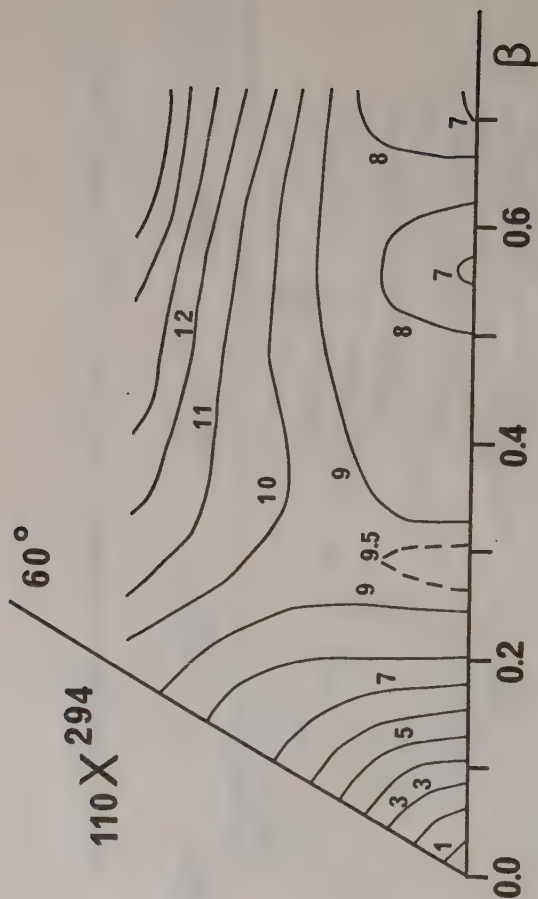


Abb. 14c. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für $^{110}\text{X}^{294}$. Skala 1 MeV.

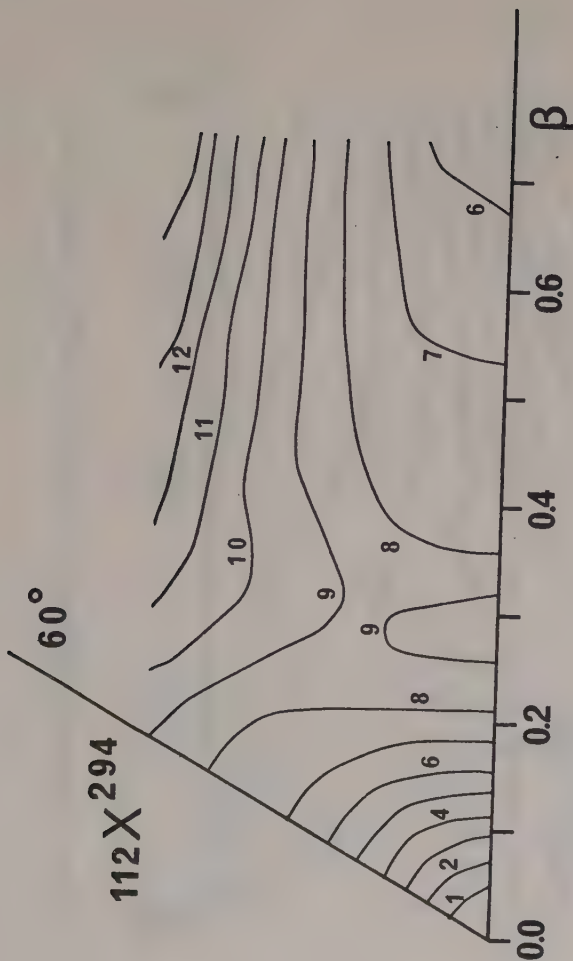


Abb. 14d. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für $^{112}\text{X}^{294}$. Skala 1 MeV.

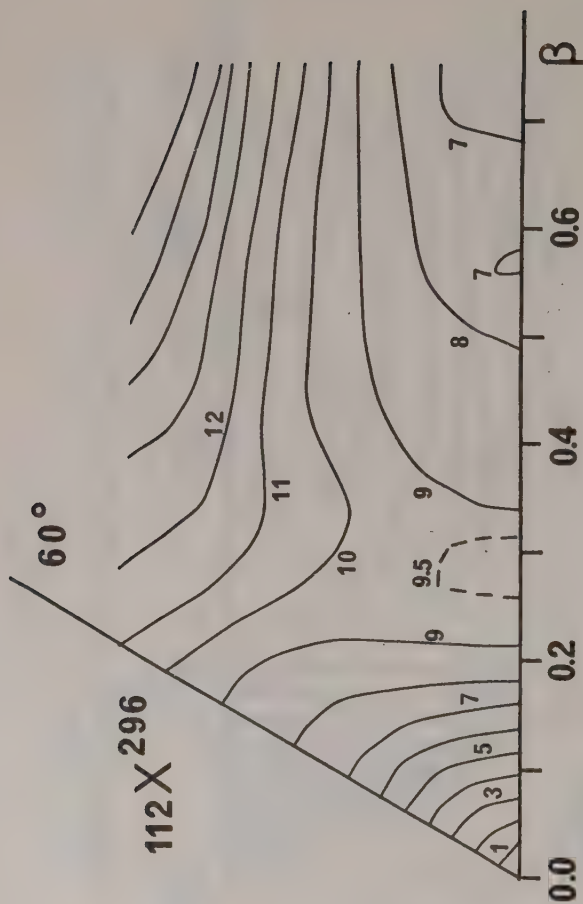


Abb. 14e. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für $^{112}\text{X}^{296}$. Skala 1 MeV.

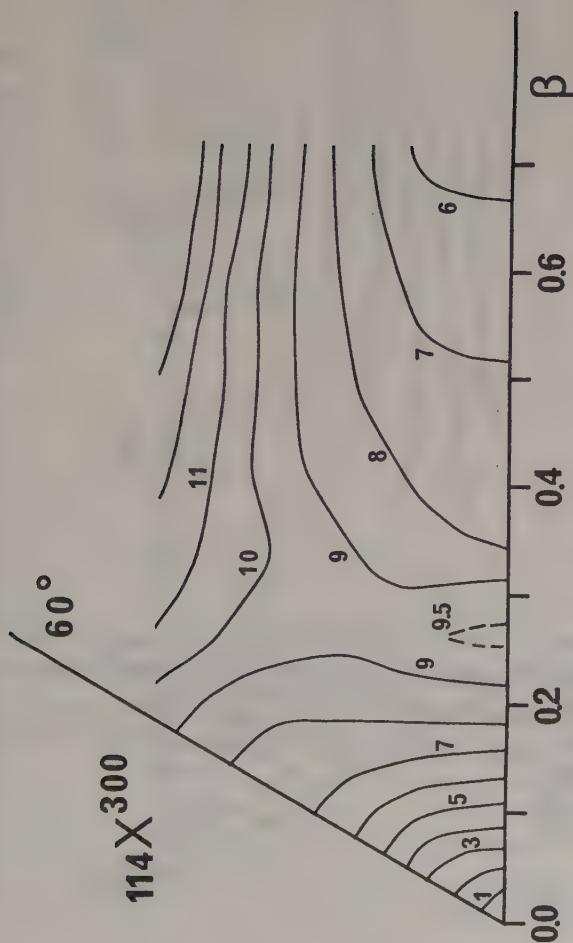


Abb. 14f. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für $^{114}\text{X}^{300}$. Skala 1 MeV.

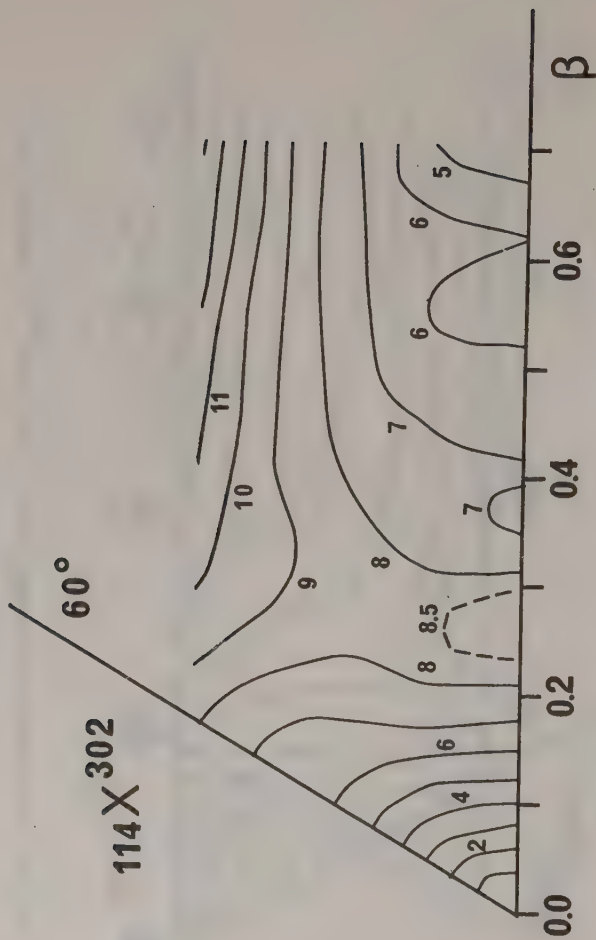


Abb. 14g. Deformationsenergie $E(\beta, \gamma)$ für $^{114}\text{X}^{302}$. Skala 1 MeV.

Z	A	E_{SH1} (MeV)	E_{SH2} (MeV)	X
110	290	-3.06	-8.02	2.21
110	292	-4.46	-9.40	2.75
110	294	-5.95	-10.87	3.18
112	294	-4.95	-10.22	2.81
112	296	-6.43	-11.6759	3.20
114	298	-7.02	-12.59	3.23
114	300	-5.41	-10.96	2.87
114	302	-3.91	-9.43	2.41

Tab.7. Schalenenergien undeformierter Kerne für die verschiedenen magischen Protonenzahlen entsprechenden Parameterwerte $C=5.8$ MeV ($Z_{mag.}=126$, E_{SH1}) und $C=3.2$ MeV ($Z_{mag.}=114$, E_{SH2}) und optimale Reduktionsfaktoren $X=5.8 \cdot E_{SH1} / E_{SH2}$.

viel Rechenzeit kostet und für viele Aussagen nicht notwendig ist.

Der Sattelpunkt liegt für alle überschweren Kerne bei einer Asymmetrie von $\gamma \approx 20^\circ - 30^\circ$. Dies stimmt auch mit Ergebnissen von Larsson, Ragnarsson und Nilsson¹⁰⁸⁾ überein, die für ein modifiziertes Nilsson-Potential mit den Freiheitsgraden ϵ und γ Rechnungen nach der Strutinsky-Methode für einige überschwere Kerne durchgeführt haben. Wie in dieser Arbeit liegen auch in¹⁰⁸⁾ die Sattelpunkte bei Asymmetrien von $20^\circ - 30^\circ$, und die Energie wird gegenüber der Rotationssymmetrie um bis zu einem MeV erniedrigt.

Die Energieflächen der Abb. 14a-g haben eine ähnliche Struktur wie die für 114^{298} (Abb. 11). Da in allen Fällen der Sattelpunkt nicht-axialer Deformation entspricht, gilt das Ergebnis von VI.2 auch für die anderen Kerne: Überschwere Kerne spalten als Prolaten, Oblaten-Mehrfach-Spaltung ist unwahrscheinlich.

VI.5 Zerfallswahrscheinlichkeit für spontane Spaltung

Eine Erniedrigung der Spaltbarrieren mit weiteren Freiheitsgraden ist für die Herstellung von überschweren Elementen besonders interessant, da eine Gestaltänderung der Barriere die Lebensdauern wesentlich beeinflusst. Deshalb wird in diesem Abschnitt der Einfluß der γ -Deformation auf die Höhe und Breite der Spaltbarriere berechnet und das Ergebnis mit denen von Nilsson et al.¹⁸⁾ für rotationssymmetrische Deformationen verglichen. Diese Rechnungen¹⁸⁾ lassen auch noch ϵ_4 -Einschnürung des Kerns zu und basieren daher auf einer realistischeren Tröpfchenmodell-Energie, schließen aber den γ -Freiheitsgrad nicht ein. ϵ und β sind nach der Beziehung von Newton³⁾ transformiert:

$$\beta = \frac{1.0569 \epsilon}{1 - \epsilon/3}$$

(VI.5.1)

Die Durchdringung der Barriere ist in der β - γ -Ebene ein zweidimensionales Problem. Rechnungen für Durchdringungswahrscheinlichkeiten bestimmter, separabler, zweidimensionaler Potentialbarrieren wurden in neuerer Zeit von Szymański et al.²⁰²⁾ unter der Annahme deformationsunabhängiger B-Werte ausgeführt. Sie vermuten, daß die Berücksichtigung der zweiten Dimension die Lebensdauer für Pu²⁴⁰ um bis zu fünf Größenordnungen erniedrigt. Diese Rechnungen gelten aber quantitativ nur für parabolische Abhängigkeit von den Gestaltparametern. Hier wird deshalb, wie auch in Rechnungen mit rotationssymmetrischen Freiheitsgraden allgemein üblich, eine eindimensionale WKB-Näherung für die Durchdringungswahrscheinlichkeit benutzt^{18,203)}.

Die Halbwertszeit wurde dafür auf zwei verschiedene Weisen berechnet: erstens aus der γ -abhängigen potentiellen Energie des Gradientenweges in Abb. 11, die auf die β -Achse projiziert wird (Abb. 15). Zweitens wurde die potentielle Energie bezüglich γ minimalisiert und diese Werte dann auf die β -Achse projiziert (vgl. Abb. 12). Beide Wege sind diskutabel, da in der Energiefläche nur die invarianten Punkte von der Parameterdarstellung unabhängig sind, also keiner der Wege dazwischen ausgezeichnet ist.

Beide Rechnungen führen annähernd zum gleichen Ergebnis. Sie erniedrigen die Halbwertszeit $\tau_{1/2}$ gegen Spaltung, die nach Ref.¹⁸⁾ ungefähr 10^{16} Jahre beträgt, um zwei Größenordnungen. Daher liegt für diesen Kern 114²⁹⁸ die Wirkung von γ -Deformationen auf die Spalthalbwertszeit im Rahmen der üblichen Unsicherheiten und beeinflußt die Stabilität des Kerns nur wenig. Dieses Ergebnis kann aber für andere überschwere Kerne mit Halbwertszeiten an der Grenze der experimentellen

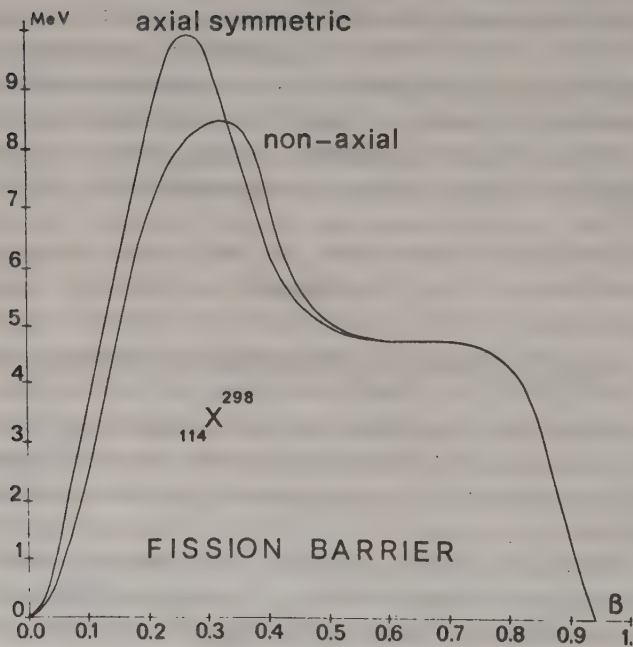


Abb.15. (=Fig.3 in Ref.³⁸) Spaltbarriere für 114X^{298} . Die Kurve für rotationssymmetrische Kerngestalt ist Ref.¹⁸) entnommen. Die zweite Kurve (non-axial) ist für γ -Deformationen korrigiert.

Empfindlichkeiten von großer Bedeutung sein, da zwei Größenordnungen dann über die Meßbarkeit entscheiden.

Anhang

A.I Coulomb-Energie eines Ellipsoids

A.I.1 Rotationsellipsoid

Die Coulomb-Energie

$$\left(\frac{3Ze}{4\pi R_c^3}\right)^2 \frac{1}{2} \iiint_V \iiint_{V'} \frac{d\tau d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{A.I.1.1})$$

eines homogen geladenen Rotationsellipsoids ist nach Flügge²⁰⁴⁾ explizit als analytischer Ausdruck anzugeben:

$$E_c = \frac{3}{10} \frac{(Ze)^2}{R_c} \frac{(1-\varepsilon^2)^{1/3}}{\varepsilon} \ln \left| \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right| \quad (\text{A.I.1.2})$$

mit Ze = Kernladung, $R_c = r_c A^{1/3}$, dem Ladungsradius. ε ist die numerische Exzentrizität des Ellipsoids mit den Halbachsen z_0 (Symmetrieachse) und x_0 , d.h.

$$\varepsilon^2 = \frac{z_0^2 - x_0^2}{z_0^2} = 1 - \frac{x_0^2}{z_0^2} \quad \text{für Prolaten} \quad (\text{A.I.1.3})$$

bzw.

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{z_0^2}{x_0^2} \quad \text{für Oblaten.} \quad (\text{A.I.1.4})$$

Für Rotationsellipsoide kann man daher die Coulomb-Energie ohne numerische Integration berechnen.

A.I.2 Dreiachsiges Ellipsoid

Im Gegensatz zu A.I.1 bleibt von der sechsfachen Integration für die Coulomb-Energie eines Ellipsoids mit drei verschieden großen Halbachsen x_0, y_0, z_0 ein Integral numerisch zu berechnen.

Nach Dirichlet³⁴⁾ ist das Potential φ_i des Ellipsoids (II.4.1) mit der homogenen Ladungsdichte ρ in einem Punkt (x, y, z) im Innern des Ellipsoids (zitiert nach Ref.²⁰⁵⁾):

$$\varphi_i = \pi x_0 y_0 z_0 \rho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2 + \lambda} - \frac{y^2}{y_0^2 + \lambda} - \frac{z^2}{z_0^2 + \lambda} \right) \frac{d\lambda}{D(\lambda)} \quad (\text{A.I.2.1})$$

mit

$$D(\lambda) = \sqrt{(x_0^2 + \lambda)(y_0^2 + \lambda)(z_0^2 + \lambda)} \quad (\text{A.I.2.2})$$

Für die Coulomb-Energie (A.I.1.1) folgt damit ein Integral über das Volumen V des Ellipsoids

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \int_V dx dy dz \rho \varphi_i(x, y, z) \quad (\text{A.I.2.3}) \\ &= \frac{1}{2} \rho^2 \pi x_0 y_0 z_0 \int_0^\infty d\lambda \int_{-z_0}^{z_0} dz \int_{-y_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{z_0^2}}}^{y_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{z_0^2}}} dy \end{aligned}$$

$$\int_{-x_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{z_0^2} - \frac{y^2}{y_0^2}}}^{x_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{z_0^2} - \frac{y^2}{y_0^2}}} dx \frac{1}{D(\lambda)} \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2 + \lambda} - \frac{y^2}{y_0^2 + \lambda} - \frac{z^2}{z_0^2 + \lambda} \right).$$

Dabei sind drei der vier Integrationen analytisch auszuführen^{206,207)}, und man erhält:

$$E_c = \frac{2}{15} \pi^2 x_0^2 y_0^2 z_0^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{D(\lambda)} \left(5 - \frac{x_0^2}{x_0^2 + \lambda} - \frac{y_0^2}{y_0^2 + \lambda} - \frac{z_0^2}{z_0^2 + \lambda} \right) . \quad (\text{A.I.2.4})$$

Es bleibt eine uneigentliche Integration numerisch zu berechnen.

A.II Elektrostatische Wechselwirkungsenergie zweier Ellipsoide

A.II.1 Getrennte Ladungsverteilung

Die Wechselwirkungsenergie zweier getrennter Ladungsverteilungen (1) und (2) läßt sich nach Hirschfelder et al. (208) als fünffache Multipolsummation schreiben (zitiert nach 152):

$$E_{cww} = \sum_{\substack{n_1 n_2 \\ m_1 m_2 \\ m}} i^{m_1 - |m_1| - m_2 + |m_2|} (-1)^{n_2 + m} \quad (\text{A.II.1.1})$$

$$\cdot \frac{\{(n_1 - |m_1|)!(n_2 - |m_2|)!\}^{1/2} (n_1 + n_2)! \bar{Q}(1)_{m_1}^* \bar{Q}(2)_{m_2}}{\{(n_1 + |m_1|)!(n_1 - |m_1|)!(n_2 + |m_2|)!(n_2 - |m_2|)!(n_1 - |m|)!(n_2 + |m|)!\}^{1/2}}$$

$$\cdot \frac{D^{(n_1)}(\phi_1, \theta_1, \psi_1)_{m_1 m}^* D^{(n_2)}(\phi_2, \theta_2, \psi_2)_{m_2 m}}{e^{n_1 + n_2 + 1}}$$

Darin ist die Lage der körperfesten Koordinatensysteme $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$

zu einem raumfesten Koordinatensystem x, y, z durch die sechs Euler-Winkel Θ_i, ϕ_i, ψ_i ($i=1,2$) gegeben. l ist der Abstand der körperfesten Systeme x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 , jeweils bezogen auf den Koordinatenursprung. $D^{(n)}_i(\phi_i, \Theta_i, \psi_i)_{m_1 m}$ sind die Elemente der Darstellung der dreidimensionalen Drehgruppe (nach Margenau und Murphy²⁰⁹). In (A.II.1.1) ist das Multipolmoment $\bar{Q}(1)_{n_1}^{m_1}$ der Ladungsverteilung (1) gegeben durch:

$$\bar{Q}(1)_{n_1}^{m_1} = \int \rho_1(\bar{r}_1, \bar{\Theta}_1, \bar{\Phi}_1) \bar{r}_1^{n_1} P_{n_1}^{m_1}(\cos \bar{\Theta}_1) e^{i m_1 \bar{\Phi}_1} d\bar{\tau}_1 \quad (\text{A.II.1.2})$$

mit der Ladungsdichte $\rho_1(\bar{r}_1, \bar{\Theta}_1, \bar{\Phi}_1)$ der Ladungsverteilung (1). $P_{n_1}^{m_1}(\cos \bar{\Theta}_1)$ ist das zugeordnete Legendrepolynom und $d\bar{\tau}_1$ das Volumenelement.

A.II.2 Rotationsellipsoide

Für beliebig zueinander orientierte, homogen geladene Rotationsellipsoide läßt sich die fünffache Multipolsumme (A.II.1.1) auf eine dreifache¹⁵²⁾ zurückführen, denn die Multipolmomente $\bar{Q}(i)_{n_i}^{m_i}$ verschwinden für $m_i \neq 0$, nur das Moment zu $m_i=0$ ergibt einen Beitrag. Wegen der angenommenen homogenen Ladungsverteilung und rotationssymmetrischen Gestalt läßt sich auch die in $\bar{Q}(i)_{n_i}^{m_i}$ enthaltene Integration analytisch ausführen und die Darstellung $D^{(n)}(\phi, \Theta, \psi)_{0m}$ der Drehgruppe durch Kugelflächenfunktionen angeben. Für die Wechselwirkungsenergie erhält man damit

$$E_{\text{cww}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{(c_1 + c_2)} \left\{ s(\lambda_1, \Theta_1) + s(\lambda_2, \Theta_2) - 1 + s(\lambda_1, \lambda_2, \Theta_1, \Theta_2, \phi) \right\} \quad (\text{A.II.2.1})$$

Dabei ist

$$\lambda_i = \frac{c_i^2 - a_i^2}{(c_1 + c_2)^2} \quad (\text{A.II.2.2})$$

für $i=1,2$ und $\phi = \phi_1 - \phi_2$. Für die einzelnen Summanden gilt nach Nix¹⁵²⁾

$$s(\lambda, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \lambda^{2n} P_{2n}(\cos \theta)}{(2n+1)(2n+3)} \quad (\text{A.II.2.3})$$

und

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2, \phi) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(2j+1)(2j+3)} \quad (\text{A.II.2.4})$$

$$\cdot \frac{3}{(2k+1)(2k+3)} \frac{(2j+2k)!}{(2j)!(2k)!} \lambda_1^{2j} \lambda_2^{2k}$$

$$\cdot \left\{ P_{2j}(\cos \theta_1) P_{2k}(\cos \theta_2) + 2 \sum_{m=1}^{m_k} (-1)^m \frac{(2j)! P_{2j}^m(\cos \theta_1)}{(2j+m)!} \right.$$

$$\cdot \left. \frac{(2k)! P_{2k}^m(\cos \theta_2)}{(2k+m)!} \cos(m\phi) \right\}.$$

Die vier Summanden in (A.II.2.1) kann man nach Cohen und Swiatecki⁶¹⁾ in folgender Weise deuten: Für $\lambda_2=0$ ergibt nur

der erste Summand einen von Null verschiedenen Beitrag, d.h. die Wechselwirkungsenergie ist gleich der zwischen einem Ellipsoid (1) und einer Kugel (2); für $\lambda_1=0$ gilt das entsprechende zwischen Ellipsoid (2) und Kugel (1). Diese beiden Wechselwirkungsenergien wurden bereits von Webster²¹⁰⁾ angegeben. Von diesen beiden Beiträgen wird die Wechselwirkungsenergie zweier Kugeln (bzw. Punktladungen) im Abstand c_1+c_2 abgezogen und eine Korrektur für die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Ellipsoiden dazuaddiert.

Falls die Drehachsen der Rotationsellipsoide parallel ($\phi=0$, $\Theta_1=\Theta_2=0$) und die Symmetrieachsen kollinear ($\Theta=0$) sind, ergeben sich weitere Vereinfachungen. Man erhält dann die von Cohen und Swiatecki⁶¹⁾ angegebenen Formeln:

(A.II.2.5)

$$S(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(2j+1)(2j+3)} \frac{3}{(2k+1)(2k+3)} \frac{(2j+2k)!}{(2j)!(2k)!} \lambda_1^{2j} \lambda_2^{2k}$$

und

$$\frac{3}{4} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^3} \right) \ln \frac{1+\lambda}{1-\lambda} + \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{für Prolaten} \quad (\text{A.II.2.6})$$

$$S(\lambda) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^3} \right) \tan^{-1} \omega - \frac{3}{2} \frac{1}{\omega^2} \quad \text{für Oblaten}$$

mit $\omega^2 = -\lambda^2$.

In diesem Spezialfall ist die fünffache Multipolsumme auf eine zweifache zurückgeführt, die numerisch wesentlich schnell-

ler zu berechnen ist als die entsprechenden Integrale für dreiaxige Ellipsoide (s. A.II.3). Die Wechselwirkungsenergie in V ist deshalb für Rotationssymmetrie nach (A.II.2.5) berechnet.

A.II.3 Dreiaxige Ellipsoide

Die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei sich berührenden Ellipsoiden mit drei verschieden langen Achsen, von denen zwei kollinear und die anderen jeweils parallel zueinander sind, läßt sich nicht analytisch angeben, aber es gelingt drei der sechs Integrationen analytisch auszuführen.

Seien x_{01}, y_{01}, z_{01} die Halbachsen des ersten Ellipsoids mit der Ladungszahl Z_1 , dem Ladungsradius $R_c = r_c A_1^{1/3}$ und e die Elementarladung. Für das zweite Ellipsoid seien die Größen x_{02}, y_{02}, z_{02} und Z_2 entsprechend definiert. Für das Potential φ_{aj} dieser Ellipsoide mit der Relation ($j=1,2$)

$$\frac{x^2}{x_{0j}^2} + \frac{y^2}{y_{0j}^2} + \frac{z^2}{z_{0j}^2} = 1 \quad (\text{A.II.3.1})$$

und der Ladungsdichte

$$\rho_j = \frac{Z_j e}{\frac{4\pi}{3} (A_j^{1/3} r_c)^3} \quad (\text{A.II.3.2})$$

gilt für einen Punkt (x, y, z) außerhalb des Ellipsoids²⁰⁵⁾:

$$\varphi_{aj} = \pi x_{0j} y_{0j} z_{0j} \rho_j \int_u^\infty \left(1 - \frac{x^2}{x_{0j}^2 + \lambda} - \frac{y^2}{y_{0j}^2 + \lambda} - \frac{z^2}{z_{0j}^2 + \lambda} \right) \frac{d\lambda}{D(\lambda)} \quad (\text{A.II.3.3})$$

mit

$$D(\lambda) = \left\{ (x_{0j}^2 + \lambda)(y_{0j}^2 + \lambda)(z_{0j}^2 + \lambda) \right\}^{1/2} \quad (\text{A.II.3.4})$$

Die untere Integrationsgrenze u ist die größte positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{x_{0j}^2 + u} + \frac{y^2}{y_{0j}^2 + u} + \frac{z^2}{z_{0j}^2 + u} = 1 \quad (\text{A.II.3.5})$$

Die Wechselwirkungsenergie zwischen den Ellipsoiden (1) und (2) setzt sich aus zwei Termen zusammen, die durch die Ladungsdichte ρ_1 des ersten Ellipsoids im Potential φ_{a2} des zweiten und die Ladungsdichte ρ_2 des zweiten im Potential φ_{a1} des ersten Ellipsoids verursacht werden. In beiden Fällen gilt die Formel:

$$E_{c12} = \frac{1}{2} \left\{ \int_{V(1)} \rho_1 \varphi_{a2} d\tau + \int_{V(2)} \rho_2 \varphi_{a1} d\tau \right\} \quad (\text{A.II.3.6})$$

Setzt man die Beziehung (A.II.3.3) für φ_{aj} in (A.II.3.6) ein, so erhält man für jeden Term ein vierfaches Integral, z.B.

$$\begin{aligned} \int_{V(1)} \rho_1 \varphi_{a2} d\tau &= 4\pi \rho_1 \rho_2 x_{02} y_{02} z_{02} \int_{z_{02}}^{2z_{01}+z_{02}} dz \quad (\text{A.II.3.7}) \\ &\int_0^{y_{01}} \sqrt{1 - (z - z_{01} - z_{02})^2 / z_{01}^2} dy \int_0^{x_{01}} \sqrt{1 - (z - z_{01} - z_{02})^2 / z_{01}^2 - y^2 / y_{01}^2} dx \\ &\int_0^\infty d\lambda \left(1 - \frac{z^2}{z_{02}^2 + \lambda} - \frac{y^2}{y_{02}^2 + \lambda} - \frac{x^2}{x_{02}^2 + \lambda} \right) \frac{1}{\{(z_{02}^2 + \lambda)(y_{02}^2 + \lambda)(z_{02}^2 + \lambda)\}^{1/2}} \end{aligned}$$

Man hat also statt über sechs Integrationsvariablen über vier zu integrieren, nämlich über x, y, z und λ .

Durch eine geeignete Variablentransformation kann man ein weiteres Integral analytisch berechnen und damit die Wechselwirkungsenergie auf eine dreifache numerische Integration zurückführen. Da die Wechselwirkungsenergie für verschiedene Massenverhältnisse der beiden Teilkerne und für unterschiedliche Deformationen - also bei konstanter Ladungsdichte für fünf freie Parameter - berechnet wird, ist diese Einsparung entscheidend, um das Problem überhaupt numerisch lösen zu können.

Es ist günstig für die Volumenintegration über Teile von Äquipotentialflächen, also Ellipsoidkappen zu integrieren. Die Abb. 16 zeigt einen Schnitt in der y - z -Ebene ($x=0$). Die Schnittlinie der beiden Ellipsoide ist durch den Parameter u der Äquipotentialfläche bestimmt. Man kann von den Integrationsvariablen x, y, z zu x, y, u übergehen, da $z(x, y, u)$ sich aus der Relation für die Äquipotentialfläche (A.II.3.5) zum Parameter u berechnen läßt. Deshalb vereinfacht sich die Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x, y, u)} \right| \quad \text{zu} \quad \left| \frac{\partial z}{\partial u} \right|.$$

Für $\frac{\partial z}{\partial u}$ ergibt sich

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{x^2}{x_{02}^2 + u} \left(\frac{z_{02}^2 + u}{x_{02}^2 + u} - 1 \right) + \frac{y^2}{y_{02}^2 + u} \left(\frac{z_{02}^2 + u}{y_{02}^2 + u} - 1 \right)}{\left(1 - \frac{x^2}{x_{02}^2 + u} - \frac{y^2}{y_{02}^2 + u} \right)^{1/2} (z_{02}^2 + u)^{1/2}} \quad (\text{A.II.3.8})$$

Die Integrationsgrenzen sind für u :

$$u_{\min} = 0$$

$$u_{\max} = 4z_{01}(z_{02} + z_{01})$$

(A.II.3.9)

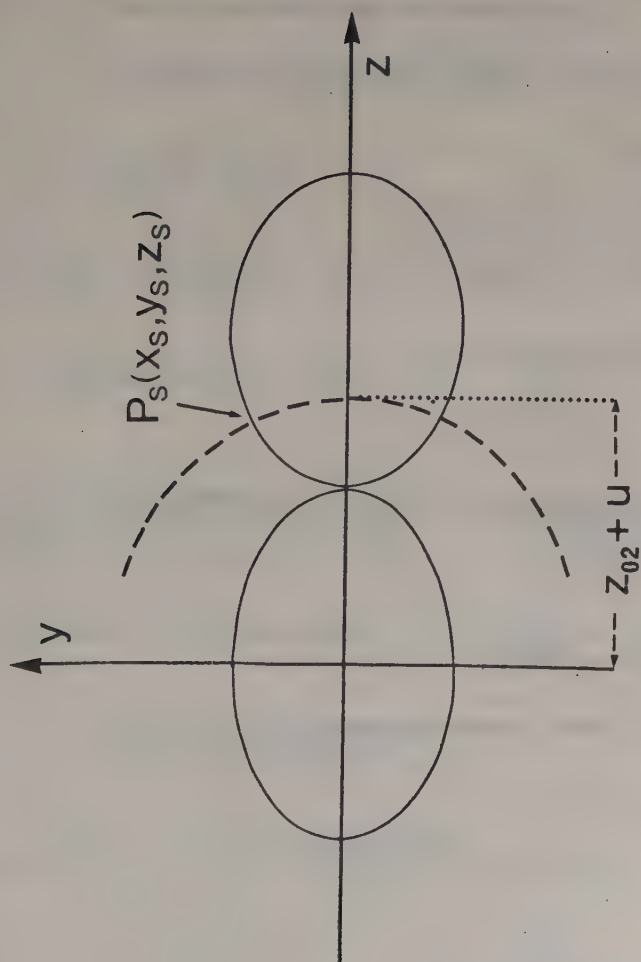


Abb. 16. Skizze zur Integration in A.II.3

für x und y folgen sie aus den Schnittlinien zwischen Ellipsoid (1) und der Äquipotentialfläche der Ladungsverteilung (2) zu festem u. Nutzt man noch die Spiegelungssymmetrie von x und y bezüglich u aus, so genügt es, über positive x und y zu integrieren.

Für die obere Integrationsgrenze von x folgt

$$x_{\max} = \sqrt{w}$$

$$\text{mit } w = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a}{c}}}{a} \quad (\text{A.II.3.10})$$

mit den Koeffizienten a, b, c:

$$a = \left(\frac{1}{x_{01}^2} - \frac{1}{z_{01}^2} \frac{z_{02}^2 + u}{x_{02}^2 + u} \right)^2$$

$$\frac{b}{2} = \frac{2z_{02}^2 + 2z_{02}z_{01} + u}{x_{01}^2 z_{01}^2} + \frac{\frac{z_{02}^2 + u}{x_{02}^2 + u}}{z_{01}^4} \frac{2z_{02}z_{01} + 2z_{02}^2 + u}{z_{01}^4} \quad (\text{A.II.3.11})$$

$$c = \frac{u(u - u_{\max})}{z_{01}^4}$$

Für die obere Integrationsgrenze von y folgt:

$$y_{\max} = \sqrt{v}$$

$$\text{mit } v = \frac{-\frac{e}{2} + \sqrt{\frac{e^2}{4} - df}}{d} \quad (\text{A.II.3.12})$$

mit den Koeffizienten d, e, f:

$$d = \left(\frac{1}{\gamma_{01}^2} - \frac{1}{z_{01}^2} \frac{z_{02}^2 + u}{\gamma_{02}^2 + u} \right)^2$$

$$\begin{aligned} \frac{e}{2} = & x^2 \left(\frac{1}{\gamma_{01}^2} - \frac{1}{z_{01}^2} \frac{z_{02}^2 + u}{\gamma_{02}^2 + u} \right) \left(\frac{1}{x_{01}^2} - \frac{1}{z_{01}^2} \frac{z_{02}^2 + u}{x_{02}^2 + u} \right) \\ & + (2z_{02}^2 + 2z_{02}z_{01} + u) \left(\frac{1}{\gamma_{01}^2 z_{01}^2} - \frac{1}{z_{01}^2} \frac{z_{02}^2 + u}{\gamma_{02}^2 + u} \right) \\ & + 2 \frac{(z_{02} + z_{01})^2}{z_{01}^4} \frac{z_{02}^2 + u}{\gamma_{02}^2 + u} \end{aligned}$$

(A.II.3.13)

$$\begin{aligned} f = & x^4 \left(\frac{1}{x_{01}^2} - \frac{1}{z_{01}^2} \frac{z_{02}^2 + u}{x_{02}^2 + u} \right)^2 + 2x^2 \left(\frac{2z_{02}(z_{02} + z_{01}) + u}{z_{01}^2 x_{01}^2} \right. \\ & \left. + \frac{2z_{01}(z_{02} + z_{01}) - u}{z_{01}^4} \frac{z_{02}^2 + u}{x_{02}^2 + u} \right) + \frac{u(u - u_{\max})}{z_{01}^4} \end{aligned}$$

Für den einen Summanden der Wechselwirkungsenergie ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \int_{V(1)} g_1 \varphi_{a2} d\tau &= \pi g_1 g_2 x_{02} \gamma_{02} z_{02} \int_0^{u_{\max}} du \frac{1}{\sqrt{z_{02}^2 + u}} \\ &\int_{\kappa}^{\infty} d\lambda \frac{1}{\sqrt{(k_{02}^2 + \lambda)(\gamma_{02}^2 + \lambda)(z_{02}^2 + \lambda)}} \int_0^{x_{\max}} dx \\ &\int_0^{y_{\max}} dy \frac{1}{\sqrt{-\frac{y^2}{\gamma_{02}^2 + u} + 1 - \frac{x^2}{x_{02}^2 + u}}} \end{aligned}$$

(A.II.3.14)

$$\left\{ 1 + \frac{x^2}{x_{02}^2 + u} \left(\frac{z_{02}^2 + u}{x_{02}^2 + u} - 1 \right) + \frac{y^2}{\gamma_{02}^2 + u} \left(\frac{z_{02}^2 + u}{\gamma_{02}^2 + u} - 1 \right) \right\}$$

$$\left\{ 1 - \frac{x^2}{x_{02}^2 + \lambda} - \frac{y^2}{\gamma_{02}^2 + \lambda} - \frac{z_{02}^2 + u}{z_{02}^2 + \lambda} + \frac{x^2}{x_{02}^2 + u} \frac{z_{02}^2 + u}{z_{02}^2 + \lambda} + \frac{y^2}{\gamma_{02}^2 + u} \frac{z_{02}^2 + u}{z_{02}^2 + \lambda} \right\}.$$

Die Integration über y läßt sich analytisch durchführen²⁰⁷⁾, da die folgenden Integraltypen auftreten

$$\int dy \frac{1}{u} \quad , \quad \int dy \frac{y^2}{u} \quad \text{und} \quad \int dy \frac{y^4}{u} \quad (\text{A. II. 3. 15})$$

mit $u = \sqrt{\alpha + \gamma y^2}$ und $\alpha > 0, \gamma < 0$.

Damit ist die vierfache Integration auf eine dreifache zurückgeführt und kann numerisch z.B. durch Gauß-Integration^{211, 212)} berechnet werden. Dabei reichen für die endlichen Integrationen über u und x jeweils 12 Stützstellen aus. Für die uneigentliche Integration wurde das Integrationsintervall zehnfach unterteilt; dabei betrug die obere Integrationsgrenze jeweils das zehnfache der unteren.

Die Genauigkeit der Integration wurde durch Vergleich mit der analytischen Wechselwirkungsenergie zweier Kugeln, mit der Multipolsumme für zwei Rotationsellipsoide und mit dem numerischen Ergebnis für zwei dreiachsige Ellipsoide bei höherer Stützstellenzahl für verschiedene Intervallteilungen ermittelt. Bei jeweils 12-Punkt-Gauß-Integration und 10 Teilintervallen betrug die Genauigkeit (auf einer 36-Bit-Maschine) $5 \cdot 10^{-6}$.

Literatur

- 1) N.Bohr und J.A.Wheeler, Phys.Rev. 56(1939)426
- 2) L.Wilets, Theories of Nuclear Fission (Clarendon Press, Oxford, 1964)
- 3) T.D.Newton, Can.J.Phys. 38(1960)700
- 4) S.G.Nilsson, Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk. 29(1955)No.16
- 5) E.Nadjakov, Y.Piperova, D.Karadjov und I.Sivriev, Comptes rendues de l'Académie bulgare des Sciences 22(1969)639
- 6) A.S.Davydov und G.V.Filippov, Soviet Phys. JETP 8(1959)303
- 7) D.A.Zaikin, Soviet Phys. JETP 8(1959)365
- 8) V.M.Strutinsky, Yad.Fiz. 3(1966)614; Sov.J.Phys. 3(1966) 449
- 9) V.M.Strutinsky, Ark.Fys. 36(1967)629
- 10) S.M.Polikanov, V.A.Druin, V.A.Karnaukov, V.L.Mikheev, A.A.Pleve, N.K.Skobolev, V.G.Subotin, G.M.Ter-Akopian und V.A.Fomichev, Soviet Phys. JETP 15(1962)1016
- 11) G.N.Flerov und S.M.Polikanov, Compt.Rend.Congr.Intern. Phys.Nucl.(Paris 1964), Vol.1, S.407
- 12) P.Möller, B.Nilsson, S.G.Nilsson, A.Sobiczewski, Z.Szymański und S.Wycech, Phys.Letters 26B(1968)418
- 13) P.Möller, S.G.Nilsson, A.Sobiczewski, Z.Szymański und S.Wycech, Phys.Letters 30B(1969)223
- 14) P.Möller und S.G.Nilsson, Phys.Letters 31B(1970)283
- 15) P.Möller, Nucl.Phys. A142(1970)1
- 16) P.Möller und B.Nilsson, Phys.Letters 31B(1970)171
- 17) B.Nilsson, Nucl.Phys. A129(1969)445
- 18) S.G.Nilsson, C.F.Tsang, A.Sobiczewski, Z.Szymański, S.Wycech, C.Gustafson, I.-L.Lamm, P.Möller und B.Nilsson, Nucl.Phys. A131(1969)1
- 19) S.G.Nilsson, J.R.Nix, A.Sobiczewski, Z.Szymański, S.Wycech, C.Gustafson und P.Möller, Nucl.Phys. A115 (1968)545

- 20) S.G.Nilsson, S.G.Thompson und C.F.Tsang, Phys.Letters 28B(1969)458
- 21) S.G.Nilsson, Cargèse Lectures in Physics, Vol.3 (ed. M.Jean, Gordon and Breach, Science Publishers, New York, London, Paris, 1969) S.105
- 22) M.Bolsterli, E.O.Fiset, J.R.Nix und J.L.Norton, Phys.Rev. Letters 27(1971)681
- 23) M.Bolsterli, E.O.Fiset, J.R.Nix und J.L.Norton, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-DC-12817(1971)
- 24) G.T.Seaborg, Ann.Rev.Nucl.Science 18(1968)53
- 25) Yu.A.Muzychka, V.V.Pashkevich und V.M.Strutinsky, Sov.J. Nucl.Phys. 8(1969)417
- 26) Yu.A.Muzychka, Phys.Letters 28B(1969)539
- 27) Yu.A.Muzychka, Sov.J.Nucl.Phys. 11(1970)105
- 28) J.R.Nix, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-DC-11825(1970)
- 29) C.F.Tsang und S.G.Nilsson, Proc.Int.Conf."On the Properties of Nuclei far from the Region of beta-stability, Leysin 1970, CERN Report No.CERN 70-30 (Geneva, 1970) S.769
- 30) J.Grumann, U.Mosel, B.Fink und W.Greiner, Z.Physik 228 (1969)371
- 31) R.Fraser und W.Greiner, Preprint, 1971
- 32) R.Fraser, J.Grumann und W.Greiner, Phys.Letters 35B(1971) 483
- 33) W.Greiner, Nuclear Reactions Induced by Heavy Ions (ed. R.Bock, W.R.Hering, North Holland, 1970) S.748
- 34) P.G.L.Dirichlet, Über eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale, Abh. der Berliner Akademie, 1839
- 35) S.G.Nilsson, private Mitteilung 1972
- 36) A.Bohr und B.R.Mottelson, Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk. 27(1953) No.16

- 37) H.Schultheis und R.Schultheis, Phys.Letters 34B(1971)245
- 38) H.Schultheis und R.Schultheis, Phys.Letters 35B(1971)296
- 39) V.V.Pashkevich, Nucl.Phys. A133(1969)400
- 40) W.H.Bassichis und L.Wilets, Phys.Rev.Letters 22(1969)799
- 41) H.Schultheis, R.Schultheis und G.Süßmann, Nucl.Phys. A144
(1970)545
- 42) H.Schultheis und R.Schultheis, Phys.Letters 37B(1971)467
- 43) C.F.v.Weizsäcker, Z.Physik 96(1935)431
- 44) G.Gamow, Proc.Roy.Soc. A123(1929)386
- 45) G.Gamow, Phys.Z. 30(1929)717
- 46) G.Gamow, Proc.Roy.Soc. A126(1930)632
- 47) H.A.Bethe, Revs.Mod.Phys. 8(1936)81
- 48) H.A.Bethe und R.F.Bacher, Revs.Mod.Phys. 8(1936)165
- 49) R.D.Present und J.K.Knipp, Phys.Rev. 57(1940)571
- 50)** R.D.Present und J.K.Knipp, Phys.Rev. 57(1940)1188
- 51) R.D.Present, F.Reines und J.K.Knipp, Phys.Rev. 70(1946)557
- 52) U.L.Businaro und S.Gallone, Nuovo Cimento 1(1955)629
- 53) U.L.Businaro und S.Gallone, Nuovo Cimento 1(1955)1277
- 54) U.L.Businaro und S.Gallone, Nuovo Cimento 5(1957)315
- 55) W.J.Swiatecki, Phys.Rev. 104(1956)993
- 56) W.J.Swiatecki, Proc.2nd.Int.Conf.on Peaceful Uses of
Atomic Energy, Geneva, 1958 (United Nations, New York,
1958) Paper P/651
- 57) W.J.Swiatecki, Phys.Rev. 101(1956)97
- 58) W.J.Swiatecki, Phys.Rev. 101(1956)651
- 59) S.Frankel und N.Metropolis, Phys.Rev. 72(1947)914
- 60) S.Cohen und W.J.Swiatecki, Ann.Phys.(N.Y.) 22(1963)406
- 61) S.Cohen und W.J.Swiatecki, Ann.Phys.(N.Y.) 19(1962)67
- 62) V.M.Strutinsky, Soviet Phys. JETP 15(1962)1094

- 63) A.Bohr, Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk. 26(1952) No.14
- 64) S.G.Nilsson, Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk. 29(1955) No.16
- 65) D.L.Hill und J.A.Wheeler, Phys.Rev. 89(1953)1102
- 66) D.Laugwitz, Differentialgeometrie (Teubner, Stuttgart, 1960)
- 67) H.W.Guggenheimer, Differentialgeometry (McGraw Hill, New York, San Francisco, Toronto, London, 1963)
- 68) H.Reuter, Diplomarbeit, Universität Frankfurt a.M., 1968
- 69) W.D.Myers und W.J.Swiatecki, University of California, UCRL-11980(1965)
- 70) W.D.Myers und W.J.Swiatecki, Nucl.Phys. 81(1966)1
- 71) W.D.Myers und W.J.Swiatecki, University of California, UCRL-17070(1966)
- 72) W.D.Myers und W.J.Swiatecki, Proc.Int.Symp."Why and how should we investigate nucleides far off the stability line", Lysekil, Sweden (August 21-27, 1966)
- 73) A.E.S.Green und D.F.Edwards, Phys.Rev. 91(1953)46
- 74) A.G.W.Cameron und R.M.Elkin, Can.J.Phys. 43(1965)1288
- 75) W.J.Swiatecki, Proc.Conf. on Nucleidic Masses, Vienna 1963 (ed. W.H.Johnson, Jr., Springer-Verlag, Wien, New York, 1964) S.58
- 76) H.R.Collard, L.R.B.Elton und R.Hofstadter, in Landolt-Börnstein, Numerical and Functional Relationships in Science and Technology, New Series, Group 1, Vol.2 (Springer-Verlag, Wien, New York, 1967)
- 77) L.R.B.Elton, Nuclear Sizes (Oxford University Press, 1961)
- 78) H.C.Lee und R.Y.Cusson, Nucl.Phys. A170(1971)439
- 79) H.A.Bethe und P.J.Siemens, Phys.Letters 27B(1968)549
- 80) K.A.Brueckner, J.R.Buchler, R.C.Clark und R.J.Lombard Phys.Rev. 181(1969)1543
- 81) R.Hofstadter, Revs.Mod.Phys. 28(1956)214

- 82) R.Hofstadter, Ann.Rev.Nucl.Science 7(1957)231
- 83) W.D.Myers, Phys.Letters 30B(1969)451
- 84) W.D.Myers, University of California, UCRL-18214(1968)
- 85) W.D.Myers und W.J.Swiatecki, Ann.Phys.(N.Y.) 55(1969)395
- 86) A.S.Tyapin, Sov.J.Nucl.Phys. 13(1971)18
- 87) V.R.Pandharipande, Phys.Letters 31B(1970)635
- 88) A.H.Wapstra, Handbuch der Physik (Hrsg. S.Flügge, Springer, Berlin, 1958) Bd.38/1, S.1
- 89) A.Green, Nuclear Physics (Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1955)
- 90) V.M.Strutinsky, Nucl.Phys. A95(1967)420
- 91) V.M.Strutinsky, Nucl.Phys. A122(1968)1
- 92) V.M.Strutinsky und S.Björnholm, Nuclear Structure, Dubna Symposium 1968 (IAEA, Vienna, 1968) S.431
- 93) S.Björnholm und V.M.Strutinsky, Nucl.Phys. A136(1969)1
- 94) V.V.Pashkevich und V.M.Strutinsky, Sov.J.Nucl.Phys. 9(1969)35
- 95) J.Damgaard, H.C.Pauli, V.V.Pashkevich und V.M.Strutinsky, Nucl.Phys. A135(1969)432
- 96) S.G.Nilsson, G.Ohlén, C.Gustafsson und P.Möller, Phys. Letters 30B(1969)437
- 97) H.J.Krappe und U.Wille, Physics and Chemistry of Fission, (IAEA, Vienna, 1969) S.197
- 98) C.F.Tsang und S.G.Nilsson, Nucl.Phys. A140(1970)275
- 99) C.F.Tsang und S.G.Nilsson, Nucl.Phys. A140(1970)289
- 100) K.Albrecht, D.Scharnweber, W.Greiner und U.Mosel, Phys. Letters 32B(1970)229
- 101) U.Mosel und D.Scharnweber, Phys.Rev.Letters 25(1970)678
- 102) C.Gustafsson, P.Möller und S.G.Nilsson, Phys.Letters 34B(1971)349
- 103) V.Metag, R.Rebnow, P.von Brentano, F.Dickmann und K.Dietrich, Phys.Letters 34B(1971)257

- 104) G.D.Adeev, P.A.Cherdantsev und I.A.Gamalya, Phys.Letters 35B(1971)125
- 105) D.Scharnweber, W.Greiner und U.Mosel, Nucl.Phys. A164 (1971)257
- 106) U.Mosel und H.W.Schmitt, Nucl.Phys. A165(1971)73
- 107) C.F.Tsang, University of California, UCRL-18899(1969)
- 108) S.E.Larsson, I.Ragnarsson und S.G.Nilsson, Preprint Lund Institute of Technology, 1972
- 109) H.C.Pauli, T.Ledergerber und M.Brack, Phys.Letters 34B(1971)264
- 110) H.C.Pauli und T.Ledergerber, Nucl.Phys. A175(1971)545
- 111) H.Kümmel, J.H.E.Mattauch, W.Thiele und A.H.Wapstra, Proc.Conf. on Nuclidic Masses, Vienna, 1963 (Springer, Wien, New York, 1964) S.42
- 112) P.A.Seeger, Nucl.Phys. 25(1961)1
- 113) F.S.Mozer, Phys.Rev. 116(1959)970
- 114) N.Zeldes, Ark.Fys. 36(1967)361
- 115) B.T.Geilikman und G.I.Khlebnikov, Sov.J.Nucl.Phys. 7(1968)155
- 116) P.H.Stelson und L.Grodzins, Nucl.Data 1 No.1(1965)21
- 117) V.M.Strutinsky und A.S.Tyapin, Sov.Phys. JETP 18(1964) 664
- 118) E.Hilf und G.Sußmann, Phys.Letters 21(1966)654
- 119) V.M.Strutinsky, Sov.Phys. JETP 16(1963)418
- 120) U.Götz und H.C.Pauli, private Mitteilung (1972)
- 121) G.N.Flerov, Y.P.Gangrsky, B.N.Markov, A.A.Pleve, S.M.Polikanov und G.Jungclaussen, Yad.Fiz. 6(1967)17
- 122) I.Boka, N.Mortologu, M.Sezon, I.Vilkov, N.Vilkov, G.N.Flerov, A.A.Pleve, S.M.Polikanov und S.P.Tretiakova, Preprint JINR E15-3573, Dubna, 1967
- 123) S.M.Polikanov, Nuclear Structure, Dubna Symposium 1968 (IAEA, Vienna, 1968), S.449

- 140) D.A.Arseniev, A.Sobiczewski und V.G.Soloviev, Nucl.Phys. A139(1969)269
- 141) M.Zielińska-Pfabé, Phys.Letters 29B(1969)280
- 142) S.das Gupta und M.A.Preston, Nucl.Phys. 49(1963)401
- 143) J.R.Huizenga, R.Chandhry und R.Vandenbosch, Phys.Rev. 126(1962)210
- 144) E.K.Hyde, The Nuclear Properties of the Heavy Elements, Part III, Fission Phenomena (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964)
- 145) I.Halpern, Ann.Rev.Nucl.Science 9(1959)245
- 146) S.Björnholm und E.Lynn, erscheint in Rev.Mod.Phys.
- 147) J.R.Huizenga, A.N.Behkami und J.H.Roberts, Physics and Chemistry of Fission (IAEA, Vienna, 1969) Paper SM-122/118
- 148) K.A.Adrosenko und G.N.Smirenkin, JETP-Letters 8(1968)108
- 149) H.Schultheis und R.Schultheis, Lett.Nuovo Cimento 3(1972) 313
- 150) R.Schade, Dissertation (Universität Frankfurt a.M., 1968)
- 151) J.R.Nix und W.J.Swiatecki, Nucl.Phys. 71(1965)1
- 152) J.R.Nix, University of California, UCRL-11338(1964)
- 153) H.W.Schmitt, Ark.Fys. 36(1967)633
- 154) F.Dickmann und K.Dietrich, Nucl.Phys. A129(1969)241
- 155) V.A.Rubchenya, Sov.J.Nucl.Phys. 9(1969)697
- 156) R.Vandenbosch, Nucl.Phys. 46(1963)129
- 157) P.Armbruster, Physics and Chemistry of Fission (IAEA, Vienna, 1965) Vol.1, S.103
- 158) V.F.Apalin, Yu.N.Gritsyuk, I.E.Kutikov, V.I.Lebedev und L.A.Mikaelyan, Nucl.Phys. 55(1964)249
- 159) H.Maier-Leibnitz, P.Armbruster und H.J.Specht, Physics and Chemistry of Fission (IAEA, Vienna, 1965) Vol.2, S.113
- 160) H.Maier-Leibnitz, H.W.Schmitt und P.Armbruster, Physics and Chemistry of Fission (IAEA, Vienna, 1965) Vol.2, S.143

- 161) A.C.Wahl, R.L.Ferguson, D.R.Nethaway, D.E.Troutner und K.Wolfsberg, Phys.Rev. 126(1962)1112
- 162) P.Armbruster, D.Hovestadt, H.Meister und H.J.Specht, Nucl.Phys. 54(1964)586
- 163) E.Konecny, H.Opower, H.Gunther und H.Göbel, Physics and Chemistry of Fission (IAEA, Vienna, 1965) Vol.1, S.401
- 164) E.Konecny, H.Gunther, H.Rösler, G.Siegert und H.Ewald, Z.Physik 231(1970)59
- 165) U.Umezawa, S.Baba und H.Baba, Nucl.Phys. A160(1970)65
- 166) P.Armbruster, Nucl.Phys. A140(1970)385
- 167) S.Mukherji, Nucl.Phys. A129(1969)297
- 168) K.Sistemich, P.Armbruster, J.Eidens und E.Roeckl, Nucl. Phys. A139(1969)289
- 169) P.O.Strom, D.L.Love, A.E.Greendale, A.A.Delucchi, D.Sam und N.E.Ballon, Phys.Rev. 144(1966)985
- 170) A.Notea, Phys.Rev. 182(1969)1331
- 171) S.G.Thompson, Ark.Fys. 36(1966)267
- 172) W.Nörenberg, Z.Physik 197(1966)246
- 173) W.Nörenberg, Phys.Letters 19(1965)589
- 174) S.A.Karamyan, Yu.Ts.Oganesyan und B.I.Pustyl'nik, Sov.J. Nucl.Phys. 11(1970)546
- 175) J.C.D.Milton und J.S.Fraser, Can.J.Phys. 40(1962)1626
- 176) M.Ashgar, C.Carles, R.Chastel, T.D.Doan, M.Ribrag und C.Signarbieux, Nucl.Phys. A145(1970)657
- 177) H.W.Schmitt, J.H.Neiler und F.J.Walter, Phys.Rev. 141 (1966)1146
- 178) A.C.Wahl, Physics and Chemistry of Fission (IAEA, Vienna, 1965) Vol.1, S.317
- 179) J.Terell, Physics and Chemistry of Fission, (IAEA, Vienna, 1965) Vol.1 S.3
- 180) J.S.Fraser und J.C.D.Milton, Phys.Rev. 93(1954)818

- 181) H.W.Schmitt und E.Konecny, Phys.Rev.Letters 16(1966)1008
- 182) S.L.Whetstone, Phys.Rev. 114(1959)581
- 183) J.S.Fraser und J.C.D.Milton, Ann.Rev.Nucl.Science 16
(1966)379
- 184) J.C.D.Milton und J.S.Fraser, Can.J.Phys. 40(1962)1626
- 185) J.C.D.Milton und J.S.Fraser, Can.J.Phys. 41(1963)817
- 186) P.Fong Phys.Rev.Letters 11(1963)375
- 187) S.G.Nilsson, Proc.Int.Conf."On Properties of Nuclear
States", Montréal 1969 (Les Presses de l'Université de
Montréal, 1969) S.149
- 188) J.R.Nix, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-DC-
10530(1969)
- 189) A.Sobiczewski, T.Krogulski, J.Blocki und Z.Szymański,
Nucl.Phys. A168(1971)519
- 190) W.J.Swiatecki, Nuclear Reactions Induced by Heavy Ions,
Heidelberg 1969 (ed. R.Bock, W.R.Hering, North Holland,
1970)
- 191) H.Meldner und G.Hermann, Z.Naturforschung 24a(1969)1429
- 192) E.Rost, Phys.Letters 26B(1968)184
- 193) J.R.Nix, Proc.Int.Conf."On the Properties of Nuclei far
from the Region of Beta-Stability", Leysin 1970, CERN
Report No.CERN 70-30 (Geneva, 1970) S.605
- 194) C.Gustafsson, I.L.Lamm, B.Nilsson und S.G.Nilsson, Ark.
Fys. 36(1967)613
- 195) A.Sobiczewski, F.A.Gareev und B.N.Kalinkin, Phys.Letters
21(1966)500
- 196) J.Grumann, T.Morović und W.Greiner, Preprint 1971, Univer-
sität Frankfurt a.M.
- 197) H.S.Köhler, Nucl.Phys. A162(1970)385
- 198) M.A.Preston, Physics of the Nucleus (Addison-Wesley Pub-
lishing Company, Inc., Reading, Mass., Palo Alto, London,
1962) S.269

- 199) R.Fraser und W.Greiner, Nucl.Phys. A177(1971)174
- 200) U.Mosel und W.Greiner, Z.Physik 217(1968)256
- 201) U.Mosel und W.Greiner, Z.Physik 222(1969)261
- 202) Z.Szymański, A.Sobiczewski und M.Zielinska-Pfabé, Proc. Int.Conf."On the Properties of Nuclei far from the Region of Beta-Stability", Leysin 1970, CERN Report No. CERN 70-30 (Geneva, 1970) S.547
- 203) P.O.Fröman und N.Fröman, JWKB Approximation (North-Holland Press, Amsterdam, 1965)
- 204) S.Flügge, Z.Physik 130(1951)163
- 205) R.Becker und F.Sauter, Theorie der Elektrizität, (Teubner, Stuttgart, 18. Auflage, 1964) Bd.1, S.77
- 206) I.N.Bronstein und K.A.Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik (H.Deutsch, Frankfurt a.M., 3. Auflage, 1962)
- 207) I.S.Gradshteyn und I.M.Ryshik, Table of Integrals, Series and Products (Academic Press, Inc., New York; London, Fifth Printing, 1971)
- 208) J.O.Hirschfelder, Ch.F.Curtis und R.B.Bird, Molecular Theory of Gases and Liquids (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1954)
- 209) H.Margenau und G.M.Murphy, The Mathematics of Physics and Chemistry (D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 2nd ed., 1956)
- 210) A.G.Webster, The Dynamics of Particles and of Rigid, Elastic and Fluid Bodies, (Teubner, Leipzig, 1925) S.415 ff.
- 211) Handbook of Mathematical Functions (eds. M.Abramowitz, A.Stegun, Dover Publications, Inc., New York, 1965)
- 212) A.H.Stroud und Don Secrest, Gaussian Quadrature Formulas (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1966)

Herrn Professor Dr. G. Süßmann danke ich für viele Anregungen und sein Interesse an der vorliegenden Arbeit. Auch allen, die mir während dieser Zeit in irgendeiner Form geholfen haben, möchte ich an dieser Stelle danken, insbesondere den Benutzern des Beschleuniger-Labors in Garching, dank deren Rücksichtnahme ich die dortige PDP-10-Rechenanlage benutzen konnte.

Lebenslauf

Am 10.3.1943 wurde ich, Hildegard Schultheis, als Tochter des Elektro-Ingenieurs Lothar Reuter und seiner Ehefrau Maria, geb. Gruber, in Frankfurt a.M. geboren. Nach dem Grundschulbesuch in Frankfurt a.M.-Höchst, 1949 - 1953, besuchte ich bis 1959 die Helene-Lange-Schule, Realgymnasium, danach, 1959 bis 1962, den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig des Goethe-Gymnasiums in Frankfurt a.M.. Dort bestand ich am 26. 2. 1962 die Reifeprüfung. Vom Sommersemester 1962 bis zum Wintersemester 1963/64 studierte ich Physik an der Universität Frankfurt a.M., im Sommersemester 1964 an der Universität Giessen. Im Wintersemester 1964/65 setzte ich mein Physik-Studium an der Universität Frankfurt a.M. fort und legte dort am 14.11.1964 die Diplom-Vorprüfung ab. Unter Anleitung von Prof. Dr. G. Süßmann fertigte ich seit dem Wintersemester 1966 eine Diplom-Arbeit in theoretischer Kernphysik an und bestand am 11.7.1968 die Diplomprüfung für Physiker. Seit dem Wintersemester 1968/69 arbeite ich bei Prof. Dr. G. Süßmann an meiner Dissertation. Seit 1969 bin ich wissenschaftliche Angestellte der Sektion Physik der Universität München.

